3.5 Tensormethode

Wir haben in Kapitel 3.4 Methoden für die Ausreduktion reduzibler Darstellungen betrachtet, die zwar sehr allgemein sind, aber leider oft recht mühsam anzuwenden. Hier betrachten wir eine Methode, die nur für speziellen Fällen geeignet ist, aber daher ganz elegant und effizient funktioniert.

Betrachten wir ein direktes Produkt von einer beliebigen Menge fundamentaler und konjugierter Darstellungen. Seien $\hat{e}_{i_n}$ bzw. $\hat{e}^{j_m}$ die jeweiligen Basisvektoren. Wir schreiben einen Zustand als

(werden im Folgenden wieder weggelassen)

$$v \equiv \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} \sum_{j_1,j_2,\dots,j_m} v^{i_1 i_2 \dots i_n}_{j_1 j_2 \dots j_m} \left(\hat{e}_{i_1}, \hat{e}_{i_2}, \dots, \hat{e}_{i_n}, \hat{e}^{j_1}, \hat{e}^{j_2}, \dots, \hat{e}^{j_m} \right) .$$

Sei g jetzt ein Gruppenelement, das auf v wirkt. [Man könnte auch Generatoren benutzen, es geht hier aber einfacher mit g.]

S.13 + S.15:

$$D(g)\, v \equiv \tilde{v}^{\tilde{i}_1 \tilde{i}_2 \dots \tilde{i}_n}_{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \dots \tilde{j}_m} \left(\hat{e}_{\tilde{i}_1}, \hat{e}_{\tilde{i}_2}, \dots, \hat{e}_{\tilde{i}_n}, \hat{e}^{\tilde{j}_1}, \hat{e}^{\tilde{j}_2}, \dots, \hat{e}^{\tilde{j}_m} \right) ,$$

wo, wegen
$$g \hat{e}_{i_1} \equiv \hat{e}_{\tilde{i}_1} g_{\tilde{i}_1 i_1} \equiv \hat{e}_{\tilde{i}_1} g^{\tilde{i}_1}_{\ i_1}$$
$$g^* \hat{e}^{j_1} \equiv \hat{e}^{\tilde{j}_1} g^*_{\tilde{j}_1 j_1} \equiv \hat{e}^{\tilde{j}_1} g^{*\,j_1}_{\ \tilde{j}_1} ,$$
die Koeffizienten als

$$\tilde{v}^{\tilde{i}_1 \tilde{i}_2 \dots \tilde{i}_n}_{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \dots \tilde{j}_m} = g^{\tilde{i}_1}_{\ i_1} g^{\tilde{i}_2}_{\ i_2} \cdots g^{\tilde{i}_n}_{\ i_n} \, g^{*\,j_1}_{\ \tilde{j}_1} g^{*\,j_2}_{\ \tilde{j}_2} \cdots g^{*\,j_m}_{\ \tilde{j}_m} \, v^{i_1 i_2 \dots i_n}_{j_1 j_2 \dots j_m} .$$

geschrieben werden können. Alle Informationen sind in dieser "tensorartigen" Transformation der Koeffizienten enthalten.

Jetzt können drei wichtige Eigenschaften der Transformation festgesetzt werden:

(i) v <u>symmetrisch</u> in $(i_a \leftrightarrow i_b)$ bzw. $(j_a \leftrightarrow j_b)$ $\Leftrightarrow$
$\tilde{v}$ symmetrisch in $(\tilde{i}_a \leftrightarrow \tilde{i}_b)$ bzw. $(\tilde{j}_a \leftrightarrow \tilde{j}_b)$ [trivial]

(ii) v <u>antisymmetrisch</u> in $(i_a \leftrightarrow i_b)$ bzw. $(j_a \leftrightarrow j_b)$ $\Leftrightarrow$
$\tilde{v}$ antisymmetrisch in $(\tilde{i}_a \leftrightarrow \tilde{i}_b)$ bzw. $(\tilde{j}_a \leftrightarrow \tilde{j}_b)$ [trivial]

(iii) v hat einen <u>"Spurteil"</u>, $\delta^{i_a}_{j_b}$ $\Leftrightarrow$
$\tilde{v}$ hat einen Spurteil $\delta^{\tilde{i}_a}_{\tilde{j}_b}$

$$\Big[\; g^{\tilde{i}_a}_{\ i_a} g^{*\,j_b}_{\ \tilde{j}_b} \delta^{i_a}_{j_b} \equiv g_{\tilde{i}_a i_a} g^*_{\tilde{j}_b i_a} = g_{\tilde{i}_a i_a} g^{\dagger}_{i_a \tilde{j}_b} = (g g^{\dagger})_{\tilde{i}_a \tilde{j}_b} \underset{g \text{ unitär}}{=} \delta_{\tilde{i}_a \tilde{j}_b} \equiv \delta^{\tilde{i}_a}_{\tilde{j}_b} \quad \square \;\Big]$$

> Das heißt, symmetrische und antisymmetrische Tensoren sowie Spurteile bilden invariante Unterräume, und damit Basen für irreduzible Darstellungen!

Dazu kommt noch [obwohl nur in speziellen Fällen] eine weitere invariante Struktur. Seien:

* ε_{ij}, $i,j=1,2$
  - antisymmetrisch, $\varepsilon_{ji} = -\varepsilon_{ij}$
  - $\varepsilon_{12} = +1$
* ε_{ijk}, $i,j,k=1,2,3$
  - antisymmetrisch, $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ usw.
  - $\varepsilon_{123} = +1$
* usw.

Dann gilt:

* für 2×2-Matrizen: $\varepsilon_{ij}\, g_{ik} g_{jl} = \det(g)\, \varepsilon_{kl}$ [Beweis: $k=1$, $l=2$ $\Rightarrow \varepsilon_{ij}\, g_{i1} g_{j2} = g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12} = \det(g)$ $\square$]
* für 3×3-Matrizen: $\varepsilon_{ijk}\, g_{im} g_{jn} g_{ko} = \det(g)\, \varepsilon_{mno}$
* usw.

Das heißt, falls wir eine Gruppe mit $\det(g)=1$ haben, dargestellt durch $n\times n$-Matrizen, dann ist der n-komponentige ε-Tensor eine weitere invariante Struktur, die in der Ausreduktion benutzt werden kann!

Dies führt gleich zu wichtigen Ergebnissen:

* $\varepsilon^{ij}\varepsilon_{jk} = \varepsilon^{i1}\varepsilon_{1k} + \varepsilon^{i2}\varepsilon_{2k} = -\delta^i_k$

  $\Rightarrow$ für $\underline{\underline{SU(2)}}$, $v^{i\cdots}_{\cdots} = \delta^i_k v^{k\cdots}_{\cdots} = -\varepsilon^{ij} \underbrace{\varepsilon_{jk} v^{k\cdots}_{\cdots}}$

  ein invariantes Objekt mit Index <u>unten</u>

  $\Rightarrow$ konjugierte und fundamentale Darstellungen sind äquivalent!

  [vgl. Aufgabe 4.3]

* $\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{imn} = \frac{1}{2}\left(\delta^j_m \delta^k_n - \delta^j_n \delta^k_m\right)$

  $\Rightarrow$ für $\underline{\underline{SU(3)}}$, $v^{\cdots jk\cdots}_{\cdots} \overset{\text{falls antisymmetrisch}}{=} \frac{1}{2}\left(v^{\cdots jk\cdots}_{\cdots} - v^{\cdots kj\cdots}_{\cdots}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} \underbrace{\varepsilon_{imn} v^{\cdots mn\cdots}_{\cdots}}$

  ein invariantes Objekt mit <u>einem</u> Index <u>unten</u>

  $\Rightarrow$ antisymmetrische fundamentale Darstellung ist äquivalent zur konjugierten Darstellung!

Beispiele : SU(3)

Ausreduktion von $3 \otimes 3$:

- Komponente sind jetzt der Form $v^{ij} \equiv S^i T^j$.
- Wir brauchen nur zu symmetrisieren:

$$S^i T^j = \frac{1}{2} S^{\{i} T^{j\}} + \frac{1}{2} S^{[i} T^{j]} ,$$

wo $S^{\{i} T^{j\}} \equiv S^i T^j + S^j T^i$, $S^{[i} T^{j]} \equiv S^i T^j - S^j T^i$.

- Wieviele unabhängige Strukturen in $S^{\{i} T^{j\}}$?

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow 6$$

- Die antisymmetrische Kombination, auf der anderen Seite, ist äquivalent zu 3^* [S. 30]

$$\Rightarrow \underline{3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*} \quad !$$

Ausreduktion von $3^* \otimes 3$:

- $v^i_j \equiv S^i T_j$

$$= \underbrace{S^i T_j - \frac{1}{3} \delta^i_j S^k T_k}_{\text{spurlos}} + \frac{1}{3} \delta^i_j S^k T_k$$

- Wieviele unabhängige Strukturen in einer spurlosen 3×3-Matrix ?

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \Rightarrow 8$$

- In $S^k T_k$ gibt es nur ein einziges Objekt.

$$\Rightarrow \underline{3^* \otimes 3 = 8 \oplus 1} \quad !$$

——— ∘ ———

Appendix: Die Tensormethode erlaubt uns, die Dimension $d(q^1, q^2)$ einer allgemeinen Darstellung der $SU(3)$ zu bestimmen!

(a) Falls es Indizes unten bzw. oben gibt, in dessen Wechsel die Koeffizienten antisymmetrisch sind, können wir diese mit ε-Tensor zu einem einzigen Index oben bzw. unten umwandeln [S. 30].
Das heißt, wir können annehmen, daß alle irreduziblen Darstellungen Koeffizienten haben, die sowohl unten als auch oben völlig symmetrisch sind.

(b) Weiterhin können Spurteile ausgesondert werden. Betrachten wir also Tensoren

$$v^{i_1 i_2 \dots i_n}_{j_1 j_2 \dots j_m},$$

die symmetrisch in jedem Umtausch $i_a \leftrightarrow i_b$ sowie $j_c \leftrightarrow j_d$ sind, sowie spurlos, falls mit einem beliebigen $\delta^{j_a}_{i_b}$ "aufoperiert".

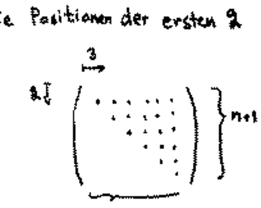
Wir bezeichnen ein solches Objekt mit (n, m).

(c) Was ist das höchste Gewicht, das mit solchen Koeffizienten erreicht werden kann? Wählen wir oben Indizes, die dem $\omega^1 = \mu^1$ entsprechen [vgl. S. 18, 22], d.h. $i_1 = i_2 = \dots = i_n \equiv 1$; $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
Auf der anderen Seite ist μ^2 eines der Gewichte der konjugierten Darstellung [vgl. Aufgabe 6.4]. Kann aber nicht dem $\hat{e}^1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ entsprechen, weil dies zum Gewicht $-\mu^1$ führt! Sei es z.B. $\hat{e}^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Wir betrachten also $v^{11\dots1}_{22\dots2}$. Ist symmetrisch, und hat keinen Teil, der zum δ^i_j proportionell ist $\Rightarrow$ von gewünschter Form.
Das höchste Gewicht dieser Darstellung: $n \cdot \mu^1 + m \cdot \mu^2$. Also $\underline{\underline{q^1 = n,\ q^2 = m}}$!

(d) Wieviele unabhängige Koeffizienten dieser Form gibt es?
Symmetrie $\Rightarrow$ wir können die Indizes als $11\dots122\dots233\dots3$ ordnen.
Karakterisieren wir diese Ordnung durch die Positionen der ersten 2 bzw. ersten 3 ...

$\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{n \text{ Indizes}}\ \overset{a}{\uparrow}$ $n+1$ = taucht nicht auf



$\Rightarrow \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ Möglichkeiten.

Dasselbe gilt für die unteren Indizes, mit $n \to m$.
Nähmen wir eine Spur, hätten wir dieselben Symmetrien, aber mit $n-1$ Indizes oben und $m-1$ unten. Wegen Spurlosigkeit müßen alle solchen Indexwahlen wegfallen!

$$\Rightarrow d(n,m) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(m+1)}{4}\left[nm + 2m + 2n + 4 - nm\right] = \frac{(n+1)(m+1)(n+m+2)}{2} \quad !$$