3.4 Ausreduktion

Wir können jetzt alle endlichdimensionalen irreduziblen unitären Darstellungen einer gegebenen (halbeinfachen) Lie-Gruppe bzw. Algebra klassifizieren. Eine allgemeine Darstellung [insbesondere eine Produktdarstellung $D_1 \otimes D_2 \otimes \dots$, vgl. S. 16] ist aber reduzibel. Wie können wir es zu einer Summe von irreduziblen Darstellungen [$D_a \oplus D_b \oplus D_c \oplus \dots$, vgl. S. 16] ausreduzieren?

Um dies zu tun, müßen wir die Gewichtsdiagramme von Produkt- bzw. Summendarstellungen bestimmen!

Summe:

- $D_1 \oplus D_2\,(g)\,(v_1, v_2) \equiv (D_1(g)v_1, 0) + (0, D_2(g)v_2)$
- Basisvektoren: $\{(\hat{e}_i, 0)\}$ zusammen mit $\{(0, \hat{e}_j)\}$.
- Generatoren: $\left(\begin{array}{c|c} D_1(T^a) & \\ \hline & 0 \end{array}\right)$ zusammen mit $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & D_2(T^a) \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{c|c} D_1(H_i) & \\ \hline & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_i \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ falls $D_1(H_i)v_1 = w_i v_1$

$\Rightarrow$ die Gewichtsvektoren von $D_1 \oplus D_2$ sind einfach die Gewichtsvektoren von D_1 und die Gewichtsvektoren von D_2.

Produkt:

- $D_1 \otimes D_2(g)\,(v_1, v_2) \equiv (D_1(g)v_1, D_2(g)v_2)$
- Basisvektoren: $\{(\hat{e}_i, \hat{e}_j)\}$
- Generatoren: $D_i(g) = \exp(i\theta^a D_i(T^a)) = \mathbb{1} + i\theta^a D_i(T^a) + \mathcal{O}(\theta)^2$.

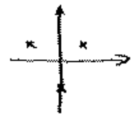
$$\Rightarrow D_1 \otimes D_2\,(v_1, v_2) = (v_1, v_2) + i\theta^a \left[(D_1(T^a)v_1, v_2) + (v_1, D_2(T^a)v_2) \right] + \mathcal{O}(\theta^a)^2$$

- $D_1(H_i)v_1 = w_i v_1$ & $D_2(H_i)v_2 = \bar{w}_i v_2$

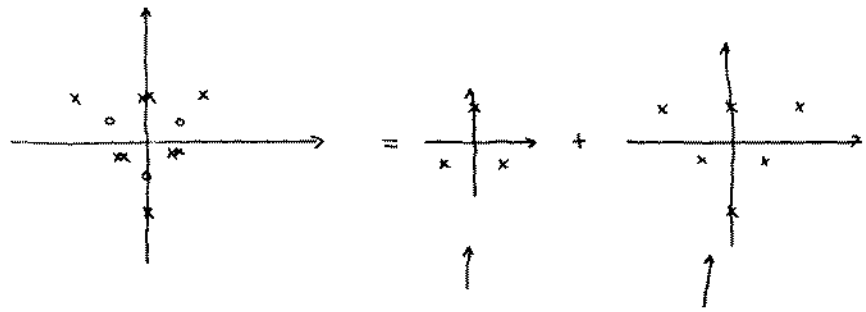
$$\Rightarrow \left[(D_1(H_i)v_1, v_2) + (v_1, D_2(H_i)v_2) \right] = (w_i + \bar{w}_i)(v_1, v_2)$$

$\Rightarrow$ die Gewichtsvektoren von $D_1 \otimes D_2$ sind alle möglichen Summen der Gewichtsvektoren von D_1 und D_2.

Beispiel: SU(3)

S. 23: $3 = (1,0) =$  Übung 6.4: $3^* = (0,1) =$ 

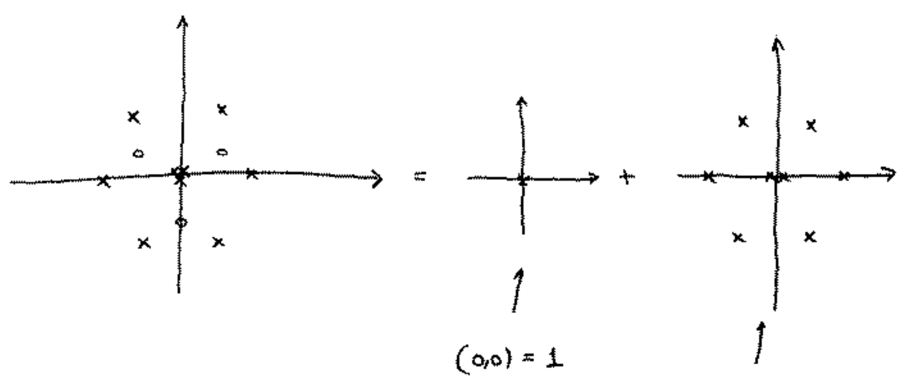
Betrachten wir $3 \otimes 3$:



$(0,1) = 3^*$ S. 23: $(2,0) \equiv 6$

$$\Rightarrow \quad \underline{3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*} \quad !$$

Betrachten wir $3^* \otimes 3$:



$(0,0) = 1$

S. 23: $(1,1) \equiv 8$.

$$\Rightarrow \quad \underline{3^* \otimes 3 = 8 \oplus 1} \quad !$$

NB: Für SU(2) bzw. Spin, mit $s = \frac{q^1}{2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$, kennen wir schon das entsprechende Ergebnis in einer allgemeinen Form:

$$\text{"}s_1\text{"} \otimes \text{"}s_2\text{"} = \text{"}|s_1 - s_2|\text{"} \oplus \text{"}|s_1 - s_2| + 1\text{"} \oplus \ldots \oplus \text{"}s_1 + s_2\text{"},$$

mit jeweils die Dimensionen $d_i = 2s_i + 1$.

Bislang haben wir mit Gewichtsvektoren, d.h. "Messwerten" der Eigenzustände, operiert. Aber wie schreibt man einen Eigenzustand / Wellenfunktion selbst als eine Summe der Eigenzustände der irreduziblen Darstellungen?
D.h.,

$$(v, \tilde{v}) = \sum_{ij} v_i \tilde{v}_j \, (\hat{e}_i, \hat{e}_j) \equiv \sum_{ij} v_i \tilde{v}_j \left\{ \sum_\alpha C_\alpha^{(1)} \hat{e}_\alpha^{(1)} + \sum_\beta C_\beta^{(2)} \hat{e}_\beta^{(2)} + \ldots \right\},$$

wo $\hat{e}_\alpha^{(i)}$ die Basisvektoren der irreduziblen Darstellungen sind?
Es gilt also, die Koeffizienten $C_\alpha^{(i)}$ zu finden!

Dieses Problem ist nichts anders als eine Verallgemeinerung der Clebsch-Gordan-Zerlegung der Darstellungen von $SU(2)$.

Zur Erinnerung:

* $H_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \equiv S_3$; $q^1 \equiv 2s$; $\omega_1 \equiv m$.
* Das höchste Gewicht für gegebenes s: $m \equiv s$.
* Alle Gewichte: $m = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$; $d = 2s+1$ Stück.
* Notation für Basisvektoren bzw. Eigenzustände:
  $|s\ m\rangle$.
* $(v_1 v_2) \equiv |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$
* $S_\pm |s\ m\rangle = \sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}\ |s\ m\pm 1\rangle$

Weiterhin:

* S. 25 : das Gewicht von $|s_1 m_1\rangle|s_2 m_2\rangle$ ist $m_1 + m_2$.
* S. 26 : unter "$|s_1 - s_2|$" $\oplus \ldots \oplus$ "$s_1 + s_2$" kann nur "$s_1 + s_2$" das Gewicht $s_1 + s_2$ haben

$$\Longrightarrow \quad |s_1\, s_1\rangle |s_2\, s_2\rangle = |s_1 + s_2, s_1 + s_2\rangle \quad !$$

Operiert man jetzt auf beide Seiten mit S_-, kann man die Clebsch-Gordan-Zerlegung herleiten.

<u>Beispiel</u>: Wie kann $|\tfrac12 \tfrac12\rangle|\tfrac12 -\tfrac12\rangle$ mit den Eigenzuständen $|1m\rangle$, $|00\rangle$ ausgedrückt werden?

$$|\tfrac12 \tfrac12\rangle|\tfrac12 \tfrac12\rangle = |1\,1\rangle \qquad \Big|\; S_-$$

$$\sqrt{\tfrac12\cdot\tfrac32+\tfrac12\cdot\tfrac12} = 1\;;\;\sqrt{1\cdot 2-1\cdot 0} = \sqrt2$$

$$|\tfrac12 -\tfrac12\rangle|\tfrac12 \tfrac12\rangle + |\tfrac12 \tfrac12\rangle|\tfrac12 -\tfrac12\rangle = \sqrt2\,|1\,0\rangle \qquad \Big|\; S_-$$

$$\sqrt{\tfrac12\cdot\tfrac32-\tfrac12\cdot\tfrac32} = 0\;;\;\sqrt{1\cdot 2+0\cdot 1} = \sqrt2$$

$$2\,|\tfrac12 -\tfrac12\rangle|\tfrac12 -\tfrac12\rangle = 2\,|1\,-1\rangle$$

$$\Rightarrow\; |11\rangle = |\tfrac12\tfrac12\rangle|\tfrac12\tfrac12\rangle \;;\; |10\rangle = \tfrac{1}{\sqrt2}\left(|\tfrac12 -\tfrac12\rangle|\tfrac12\tfrac12\rangle + |\tfrac12\tfrac12\rangle|\tfrac12 -\tfrac12\rangle\right) \;;\; |1\,-1\rangle = |\tfrac12 -\tfrac12\rangle|\tfrac12 -\tfrac12\rangle$$

Dazu muß $|00\rangle$ orthogonal zu $|10\rangle$ sein*, und normiert

$$\Rightarrow\; |00\rangle = \tfrac{1}{\sqrt2}\left(-|\tfrac12 -\tfrac12\rangle|\tfrac12\tfrac12\rangle + |\tfrac12\tfrac12\rangle|\tfrac12 -\tfrac12\rangle\right)$$

Vorzeichen ist Konvention

$$\Rightarrow\; |\tfrac12\tfrac12\rangle|\tfrac12 -\tfrac12\rangle = \tfrac{1}{\sqrt2}\left(|10\rangle + |00\rangle\right)$$

[* alternativ kann man von $S_+|00\rangle = 0$ ausgehen]

<u>Verallgemeinerung</u>

Das Prinzip der SU(2) läßt sich verallgemeinern:

* Der Eigenzustand mit dem höchsten Gewicht ist ein direktes Produkt der Eigenzustände mit den höchsten Gewichten der "Teilnehmerdarstellungen".
* Andere Beziehungen können durch Operationen mit $D(E_{-\alpha^k})$ hergeleitet werden.
* Man soll auch darauf beachten, daß die Eigenzustände verschiedener irreduziblen Darstellungen orthogonal zueinander sind, weil sie in orthogonalen Unterräumen leben.

In der Praxis sind solche Konstruktionen jedoch recht mühsam.

— · —