3.3 Klassifizierung der Darstellungen

Bausteine:

* Cartan Unteralgebra: H_i, $i=1,\dots,m$; $m = $ Rang.
* d-dimensionale Darstellung $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}(H_i)$ als $d\times d$-Matrizen, die auf die "Wellenfunktion" $v \in \mathbb{C}^d$ operieren.
* Gewichte: m-dimensionale Vektoren $\omega^j \in \mathbb{R}^m$, $j=1,\dots,d$.
  "Physikalische Zustände", mit jeweils m "Messwerten".
* Wurzeln: m-dimensionale Vektoren $\alpha^{\tilde{k}} \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{k} = 1,\dots,\dim$.
* einfache positive Wurzeln α^k, $k=1,\dots,m$:
  eine gute Basis für $\mathbb{R}^m$!
* Matrizen $\mathcal{D}(E_\alpha)$, $\mathcal{D}(E_{-\alpha})$: bringen uns von einem Gewicht zu einem anderen Gewicht: $\omega \to \omega+\alpha$ bzw. $\omega \to \omega - \alpha$.

Jetzt wird definiert: <u>das höchste Gewicht</u>.

Wir haben eine "Ordnungsrelation" eingeführt: $\omega^1 > \omega^2 > \dots > \omega^d$.
Es gibt nur d Gewichte. Das heißt, wenn wir mit $\mathcal{D}(E_\alpha)$, $\alpha > 0$, auf einen Vektor mit Gewicht ω^1 operieren, <u>muß das Ergebnis gleich null sein!</u>
Für eine gegebene Ordnungsrelation ist ω^1 eindeutig.

Das höchste Gewicht zusammen mit einer "Hauptformel" [vgl. S. 79] führt jetzt zu einer eindeutigen Klassifizierung irreduzibler Darstellungen.
Die Hauptformel sagt: für jede Wurzel α und jedes Gewicht ω gilt

$$\underline{\underline{\frac{2\alpha\cdot\omega}{|\alpha|^2} = q - p}}$$

; $p = 0,1,2,\dots$ = die Anzahl weiterer Operationen mit E_α, wobei Ergebnis noch nichtverschwindend bleibt.

$q = 0,1,2,\dots$ = —"— $E_{-\alpha}$ —"—

* Für ω^1 mit beliebiger α^k, $k=1,\dots,m$: $p = 0$!

* Daher ist ω^1 vollständig und eindeutig bestimmt durch die Projektionen

$$q^k = \frac{2\alpha^k\cdot\omega^1}{|\alpha^k|^2}\ , \quad k=1,\dots,m \ ; \quad q^k = 0,1,2,\dots \quad !$$

Die entsprechende Darstellung wird als $(q^1, q^2, \dots, q^m)$ bezeichnet.

* Alle anderen Gewichte können mit Operationen $\mathcal{D}(E_{-\alpha^k})$ erreicht werden!

* Für eine zweckmäßige Konstruktion lohnt es sich, ω^1 als $\omega^1 = \sum_{k=1}^{m} q^k \mu^k$ zu schreiben, wo die "fundamentalen Gewichte" μ^k zuerst durch die Gleichungen

$$\frac{2\alpha^k \cdot \mu^l}{|\alpha^k|^2} \equiv \delta^{kl} \quad , \quad k,l \in \{1,\dots,m\}$$

zu finden sind.

Beispiel: SU(3)

S. 20: $\alpha^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\alpha^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $|\alpha^1|^2 = |\alpha^2|^2 = 1 \Rightarrow \alpha^k \cdot \mu^l \equiv \frac{1}{2}\delta^{kl}$

$l = 1$ $\quad \mu^1 \equiv (a,b)$

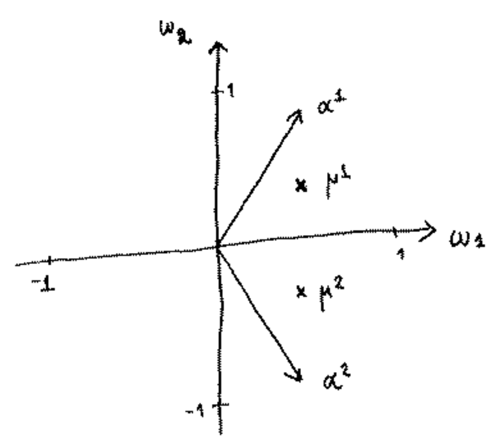
$k=1 \quad a + \sqrt{3}\, b = 1$

$k=2 \quad a - \sqrt{3}\, b = 0$ $\qquad a = \sqrt{3}\, b \Rightarrow b = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

$l = 2$ $\quad \mu^2 \equiv (c,d)$

$k=1 \quad c + \sqrt{3}\, d = 0$

$k=2 \quad c - \sqrt{3}\, d = 1$ $\qquad c = -\sqrt{3}\, d \Rightarrow d = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$



Weiterhin:

- alle Darstellungen sind "symmetrisch" in (ω_1, ω_2)-Ebene.
- (komplex) konjugierte Darstellung [vgl. Übungen]:

$$(q^1, q^2)^* = (q^2, q^1)$$

- die Dimension der Darstellung (q^1, q^2) [Beweis vielleicht später]:

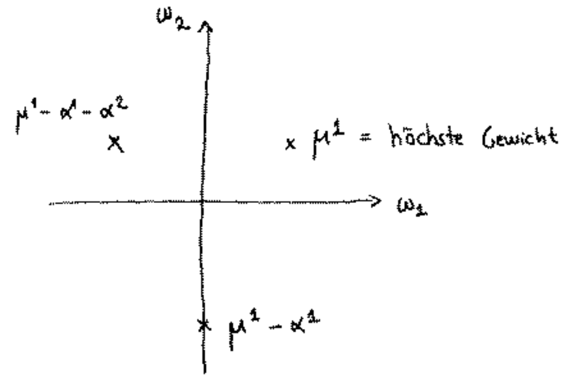
$$d = \frac{(q^1+1)(q^2+1)(q^1+q^2+2)}{2}.$$

Explizite Konstruktionen

• $(1,0)$

wir können nichts mit α^2 tun

wir können mit α^1 einmal nach unten



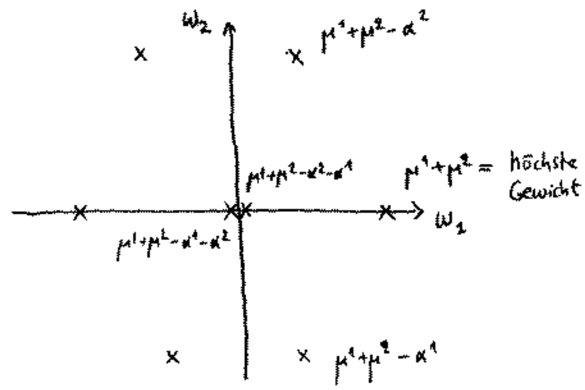
Dimension $d=3$.

Fundamentale Darstellung! (S. 18)

• $(1,1)$

mit α^2 einmal nach unten

mit α^1 einmal nach unten



linke Seite durch Symmetrie

Dimension $d=8$.

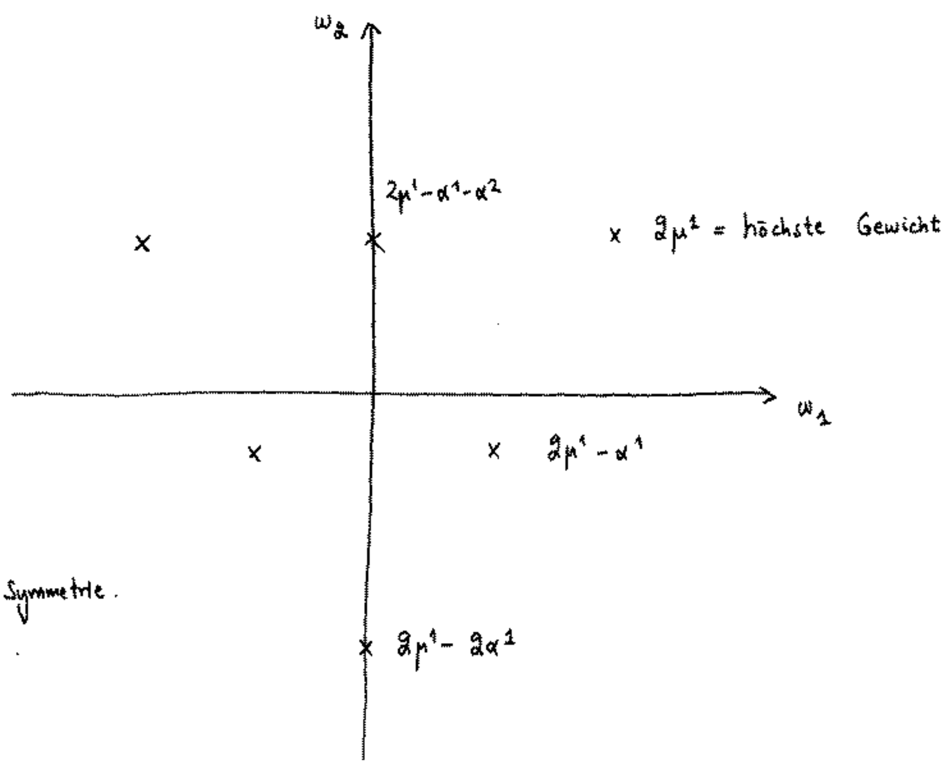
Adjungierte Darstellung! (S. 20)

"Achtfache Weg"

• $(2,0)$

mit α^2 nichts

mit α^1 zweimal nach unten



linke Seite durch Symmetrie.

Dimension $d=6$.

Appendix: Herleitung der Hauptformel.

(a) Bezeichnen wir den Vektor v mit Gewichte w_i, d.h. $D(H_i)v = w_i v$, jetzt mit $|w\rangle$.
Wir wissen (S. 20), daß $\mathcal{D}(E_\alpha)|w\rangle \propto |w+\alpha\rangle$, $\mathcal{D}(E_\alpha)^\dagger|w\rangle = \mathcal{D}(E_{-\alpha})|w\rangle \propto |w-\alpha\rangle$.
Seien $N_{\pm\alpha,\omega}$ die Normierungskonstante: $\mathcal{D}(E_{\pm\alpha})|w\rangle = N_{\pm\alpha,\omega}|w\pm\alpha\rangle$.

(b) Wir bezeichnen das Skalarprodukt im Darstellungsvektorraum mit $\langle w'|w\rangle$. Dann folgt:

$$N_{-\alpha,\omega} = \langle\omega-\alpha|\mathcal{D}(E_{-\alpha})|\omega\rangle = \langle\omega-\alpha|\mathcal{D}(E_\alpha)^\dagger|\omega\rangle = \langle\omega|\mathcal{D}(E_\alpha)|\omega-\alpha\rangle^* = N^*_{\alpha,\omega-\alpha}. \qquad (*)$$

(c) Weiterhin brauchen wir ein wichtiges Ergebnis für $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$:

$$\begin{aligned}
[H_i, [E_\alpha, E_{-\alpha}]] &\overset{\text{Jacobi-Identität}}{=} -[E_\alpha, [E_{-\alpha}, H_i]] - [E_{-\alpha}, [H_i, E_\alpha]] \\
&= [E_\alpha, [H_i, E_{-\alpha}]] - [E_{-\alpha}, [H_i, E_\alpha]] \\
&= -\alpha\,[E_\alpha, E_{-\alpha}] - \alpha\,[E_{-\alpha}, E_\alpha] = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_{j=1}^{m} \beta_j H_j$ (d.h., $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ gehört zur Cartan Unteralgebra).

Die β_j sind bislang unbekannte Koeffizienten.

(d) Die β_j können bestimmt werden in

$$\beta_j = 2\,\mathrm{Sp}\{H_j\,[E_\alpha, E_{-\alpha}]\} = 2\,\mathrm{Sp}\{E_{-\alpha}\,[H_j, E_\alpha]\} = 2\alpha_j\,\mathrm{Sp}\{E_\alpha^\dagger E_\alpha\} = \alpha_j\,!$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j H_j}}$$

Diese Beziehung gilt auch für die entsprechenden Darstellungsmatrizen.

(e)
$$\begin{aligned}
\alpha\cdot\omega &= \langle\omega|\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\mathcal{D}(H_j)|\omega\rangle = \langle\omega|[\mathcal{D}(E_\alpha),\mathcal{D}(E_{-\alpha})]|\omega\rangle = \langle\omega|\mathcal{D}(E_\alpha)\mathcal{D}(E_{-\alpha})|\omega\rangle - \langle\omega|\mathcal{D}(E_{-\alpha})\mathcal{D}(E_\alpha)|\omega\rangle \\
&= |\mathcal{D}(E_\alpha)^\dagger|\omega\rangle|^2 - |\mathcal{D}(E_\alpha)|\omega\rangle|^2 = |N_{-\alpha,\omega}|^2 - |N_{\alpha,\omega}|^2 \overset{(*)}{=} |N_{\alpha,\omega-\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\omega}|^2. \qquad (**)
\end{aligned}$$

(f) Die Darstellung ist endlichdimensional (d) $\Rightarrow$ nach einer bestimmten Anzahl von Operationen sowohl nach oben ($\mathcal{D}(E_\alpha)$) als auch nach unten ($\mathcal{D}(E_{-\alpha})$) muß man null kriegen.
Nehmen wir an, daß dies mit p nach oben bzw. q nach unten passiert:

$$\mathcal{D}(E_\alpha)|\omega+p\alpha\rangle = 0 \quad ; \quad \mathcal{D}(E_{-\alpha})|\omega-q\alpha\rangle = 0.$$

In anderen Worten, $|N_{\alpha,\omega+p\alpha}| = |N_{-\alpha,\omega-q\alpha}| \overset{(*)}{=} |N_{\alpha,\omega-(q+1)\alpha}| = 0$.

(g) Gleichung (**) mit

$$\begin{array}{lcl}
\omega \to \omega+p\alpha : & \alpha\cdot(\omega+p\alpha) &= |N_{\alpha,\omega+(p-1)\alpha}|^2 - 0 \\
\omega+(p-1)\alpha : & \alpha\cdot(\omega+(p-1)\alpha) &= |N_{\alpha,\omega+(p-2)\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\omega+(p-1)\alpha}|^2 \\
\vdots & & \vdots \\
\omega-(q-1)\alpha : & \alpha\cdot(\omega-(q-1)\alpha) &= |N_{\alpha,\omega-q\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\omega-(q-1)\alpha}|^2 \\
\omega-q\alpha : & \alpha\cdot(\omega-q\alpha) &= 0 - |N_{\alpha,\omega-q\alpha}|^2
\end{array}$$

Summe: $$(p+q+1)\,\alpha\cdot\omega + \alpha\cdot\alpha\,\underbrace{\left[\frac{p(p+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2}\right]}_{\frac{1}{2}(p+q+1)(p-q)} = 0$$

$p+q+1 \geq 1 \Rightarrow \square$.