3.2 Gewichte und Wurzeln

Wir möchten jetzt alle möglichen (unitären) Darstellungen einer Gruppe klassifizieren. Einige Kennzeichen für eine Darstellung wurden in Aufgabe 4.2 schon erwähnt: die Dimension d, die quadratische Casimir-Konstante C, und die Normierung T der Generatoren. Diese führen allerdings im Allgemeinen nicht zu einer eindeutigen Klassifizierung.

Auf der anderen Seite kennen wir schon aus der Quantenmechanik eine Klassifizierung der Darstellungen von $SU(2)$ [Spin] bzw. $SO(3)$ [Drehungen]: es gibt eine "Quantenzahl" $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ bzw. $l = 0, 1, 2, \ldots$. Die Dimension des Vektorraumes ist dann $d = 2s+1$ bzw. $d = 2l+1$, und die Casimir-Konstante ist $C = s(s+1)$ bzw. $C = l(l+1)$.

Jetzt gilt es also, s bzw. l zu anderen Gruppen zu verallgemeinern! Wie wir schon wissen, genügt es, Algebren zu betrachten.

Cartan Unteralgebra

Seien T^a die Generatoren der fundamentalen Darstellung,
F^a —"— adjungierten —"—
$D(T^a)$ —"— einer beliebigen Darstellung D.

Diagonalisieren wir gleichzeitig so viele der T^a wie möglich.
Wir nennen diese Matrizen H_i, $i = 1, \ldots, m$; $m \equiv$ Rang der Gruppe.

T^a hermitesch $\Rightarrow$ H_i reell.
H_i diagonal $\Rightarrow$ $[H_i, H_j] = 0$.

Die H_i spannen die "maximale abelsche Unteralgebra" bzw. "Cartan Unteralgebra" auf.

$$[H_i, H_j] = 0 \quad \Rightarrow \quad [D(H_i), D(H_j)] = 0.$$

Beispiel: $SU(3)$: $(T^a)^\dagger = T^a$ & $\mathrm{Sp}[T^a] = 0$ & $\mathrm{Sp}[T^a T^b] = \frac{\delta^{ab}}{2}$
$\Rightarrow$ eine mögliche Wahl:

$$H_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{Rang} = 2.$$

Es gibt insgesamt $n^2-1 = 8$ Generatoren $\Rightarrow$ noch 6 nichtdiagonale übrig!

Gewichte

In einer allgemeinen Darstellung sind $D(H_i)$, $i=1,\dots,m$, $d\times d$-Matrizen.
Weil sie diagonal sind, finden wir leicht d orthogonale Eigenvektoren:

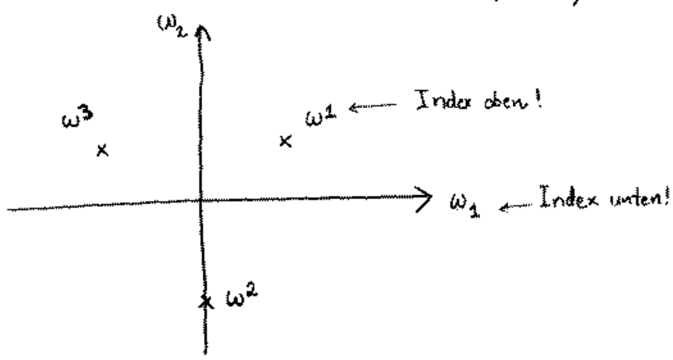
$$\begin{pmatrix} a_i & & & 0 \\ & b_i & & \\ & & c_i & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix} = b_i\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix} \qquad \text{usw.}$$

Diese Eigenvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$ usw. spannen den Darstellungsraum auf.

Die Eigenwerte (b_i usw.) werden Gewichte, ω_i, genannt: $D(H_i)\,v = \omega_i\,v$.
Wir bilden Gewichtsvektoren als $\omega \equiv (\omega_1,\dots,\omega_m)$. Es gibt also
d solche Vektoren, jeweils einen für $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\end{pmatrix}$ usw.
Wir können sie in einem m-dimensionalen Raum graphisch darstellen.

Beispiel:
fundamentale
Darstellung "3"
von $SU(3)$.

$$\omega^1 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right) \qquad \omega^3 = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right) \qquad \omega^2 = \left(0, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



Es gilt: $|\omega^1|^2 = |\omega^2|^2 = |\omega^3|^2 = \frac{1}{3}$

$$\omega^i\cdot\omega^j = -\frac{1}{6}$$

Es ist möglich, die Gewichte zu ordnen. Wir können zum Beispiel sagen, daß "$\omega^i > \omega^j$" gilt, falls die erste nichtverschwindende Komponente (d.h. die erste von links; dies ist nur eine Konvention) in $\omega^i - \omega^j$ positiv ist.
Mit dieser Konvention gilt $\omega^1 > \omega^2 > \omega^3$.

Physikalisch bestimmen gleichzeitig diagonalisierbare Operatoren $(H_1,\dots,H_m)$ messbare Eigenschaften, und die Eigenvektoren ω^i sind mögliche Messwerte. Die Entartung (falls die genannten Eigenschaften kaum zur Gesamtenergie beitragen) ist die Dimension der Darstellung, d.
Die "Wellenfunktion" (nicht direkt messbar) lebt in Darstellungsraum.

* (im Allgemeinen mit komplexen Koeffizienten!)

Wurzeln

Seien E_α die noch unbestimmten Generatoren (d.h. nichtdiagonale $n{\times}n$-Matrizen) der fundamentalen Darstellung. Wir können Linearkombinationen von T^a bilden*, so daß diese Menge "diagonalisiert" wird:

$$[H_i, E_\alpha] \equiv \alpha_i E_\alpha \quad , \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Wir bilden wieder einen m-komponentigen Vektor $\alpha \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.
Es gibt $(\dim - m)$ nichtverschwindende Vektoren dieser Art.
Sie heißen <u>Wurzeln</u>.

Die Generatoren E_α sind nicht unbedingt hermitesch:

$$\alpha_i E_\alpha^+ = (H_i E_\alpha - E_\alpha H_i)^+ = E_\alpha^+ H_i - H_i E_\alpha^+ \iff [H_i, E_\alpha^+] = -\alpha_i E_\alpha^+$$

[weil $\alpha_i \in \mathbb{R}$; vgl. unten]. D.h., α_i Wurzel $\Rightarrow$ $-\alpha_i$ Wurzel.

Normierung: $\quad Sp\,[E_\alpha E_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta}/2.$

Beispiel: SU(3)

$$\{E_\alpha\} \equiv \left\{ \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \right\}$$

$$(E_\alpha)_{ij} = \frac{1}{\sqrt2}\,\delta_{ik}\delta_{j\ell} \quad \text{mit } k \neq \ell$$

$$[H_i, E_\alpha]_{mn} = (H_i)_{mj}(E_\alpha)_{jn} - (E_\alpha)_{mj}(H_i)_{jn}$$

$$= \frac{1}{\sqrt2}\Big[\underbrace{(H_i)_{mj}}_{(H_i)_{mm}\cdot\delta_{mj}}\delta_{jk}\delta_{n\ell} - \delta_{mk}\delta_{j\ell}\underbrace{(H_i)_{jn}}_{(H_i)_{nn}\cdot\delta_{jn}}\Big] = \frac{1}{\sqrt2}\big[(H_i)_{kk} - (H_i)_{\ell\ell}\big]\cdot\delta_{mk}\delta_{n\ell}$$

$$= \underbrace{\big[(H_i)_{kk} - (H_i)_{\ell\ell}\big]}_{\alpha_i\ !}\cdot(E_\alpha)_{mn}$$

NB:

In der adjungierten Darstellung (vgl. S. 14),

$$D(T^a)\,v \equiv F^a v \equiv T^b (F^a)^{bc} v^c$$

$$= -i f^{abc}\, T^b v^c = +i f^{abc}\, v^b T^c$$

$$= v^b\,[T^a, T^b] = [T^a, v] \qquad !$$

Das heißt, $\quad [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \iff D_{adj}(H_i)\,E_\alpha = \alpha_i E_\alpha$

$\Rightarrow$ die Wurzeln $\equiv$ die Gewichte der adjungierten Darstellung!

$\Rightarrow$ $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

—— · ——

Die Generatoren E_α haben wichtige Eigenschaften. Sei v wieder ein Basisvektor der Darstellungsraum, so daß $D(H_i)v = w_i v$. Dann gilt:

$$D(H_i)D(E_\alpha)v = D([H_i, E_\alpha])v + D(E_\alpha)D(H_i)v$$
$$= \alpha_i D(E_\alpha)v + w_i D(E_\alpha)v = (w_i+\alpha_i) D(E_\alpha)v .$$

Das heißt, $D(E_\alpha)v$ muß auch ein Basisvektor sein, und $w_i+\alpha_i$ ein Gewicht! [falls $D(E_\alpha)v \neq 0$]
Dasselbe gilt mit $D(E_\alpha^\dagger)$ $\Rightarrow$ $w_i - \alpha_i$ ein Gewicht! [falls $D(E_\alpha^\dagger)v \neq 0$]

Umgekehrt:

Seien $w^k = (w_1^k, \dots, w_m^k)$, mit $k = 1, \dots, d$, die Gewichtsvektoren.
Dann sind die Wurzelvektoren der Form $\pm(w^k - w^l)$.
Ihre Anzahl ist die Dimension der adjungierten Darstellung, d.h. die Dimension "dim" der Gruppe; einige (genau m) davon sind gleich null, weil $[H_i, H_j] = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$.

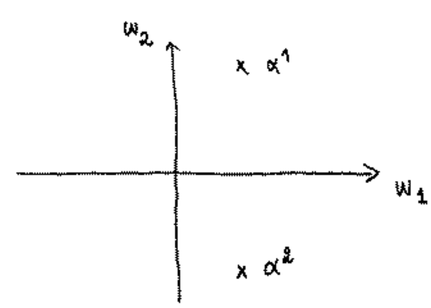
Die positiven Wurzeln: $w^k - w^l$, mit $k < l$ (falls $w^1 > w^2 > \dots$).

Die einfachen Wurzeln: positiv und können nicht als eine Summe zweier anderen positiven Wurzeln geschrieben werden. (d.h. linear unabhängig). Offensichtlich eine Teilmenge von $\{\alpha^i\} \equiv \{w^i - w^{i+1}\}$. Ihre Anzahl: der Rang m.

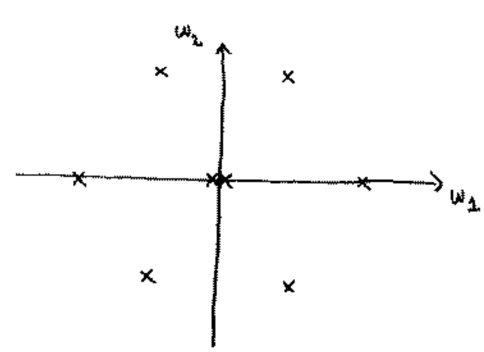
Beispiel: SU(3), Darstellung "3".

Rang = 2 $\Rightarrow$ es gibt zwei einfache positive Wurzeln:

$$\alpha^1 = w^1 - w^2 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\alpha^2 = w^2 - w^3 = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$|\alpha^1|^2 = |\alpha^2|^2 = 1$$
$$\alpha^1 \cdot \alpha^2 = -\frac{1}{2}$$



Alle Wurzeln: 8 Stück!



— o —