3. Darstellungstheorie

3.1 Allgemeines

Wir haben die Invarianzgruppen [$U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, ...] durch die Eigenschaften einer Transformation $v \mapsto Av$ definiert, wobei $v \in \mathbb{C}^n$ [vgl. S. 6].

Die Realisation der Gruppenstruktur durch solche Transformationen eines Vektorraumes wird eine Darstellung genannt, und zwar in diesem Fall die definierende bzw. fundamentale Darstellung. Es gibt aber auch viele andere Darstellungen!

Vektorraum V

* $v, w \in V \Rightarrow \alpha v + \beta w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
* die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig, falls es gilt:
  $$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 .$$
* die Dimension des Vektorraumes ist d, falls es höchstens d linear unabhängige Vektoren gibt.
* jeder $v \in V$ kann dann als $v = \sum_{i=1}^{d} v_i \hat{e}_i$ geschrieben werden, wo $\hat{e}_i$ Basisvektoren sind, und $v_i \in \mathbb{C}$ (oder $v_i \in \mathbb{R}$) die Komponente des Vektors in dieser Basis.

Lineare Abbildungen auf V

* eine lineare Abbildung $L: V \to V$ erhält die Struktur des Vektorraumes:
  $$L(\alpha v + \beta w) = \alpha L(v) + \beta L(w) .$$
* falls L^{-1} existiert, bilden lineare Abbildungen eine Gruppe, mit Multiplikation $(L_1 \cdot L_2) v = L_1(L_2(v))$. Wir bezeichnen diese Gruppe mit $GL(V)$ bzw. $GL(d, \mathbb{C})$ [vgl. S. 6] [oder auch lineare invertierbare "Operatoren" auf V].
* $$L(v) = L\Big(\sum_i v_i \hat{e}_i\Big) = \sum_i v_i L(\hat{e}_i) \equiv \sum_i v_i \Big(\sum_j \hat{e}_j L_{ji}\Big)$$
  $$= \sum_j \Big(\sum_i L_{ji} v_i\Big) \hat{e}_j .$$

  Die komplexe Zahlen L_{ji} bilden eine Matrix in dieser Basis.

Eine (lineare) <u>Darstellung</u> der Gruppe G ist ein Homomorphismus $D: G \to GL(V)$, d.h. $D(g) \in GL(V)$ und $D(g_1 \cdot g_2) = D(g_1) \cdot D(g_2)$.
Die Dimension der Darstellung ist die Dimension des Vektorraums, d.

NB. d ist unabhängig von n! Aber für die fundamentale Darstellung gilt $d=n$!
Die fundamentale Darstellung wird sogar als "n" bezeichnet.
Dazu gibt es noch eine dritte Dimension, "dim" $\equiv$ die Anzahl der Koordinate.

<u>Konjugierte Darstellung</u>: (bzw. "komplex konjugierte")

$d=n$

$D(g) \equiv g^*$

$D(g_1 \cdot g_2) = (g_1 \cdot g_2)^* = g_1^* \cdot g_2^* = D(g_1) \cdot D(g_2)$

Bezeichnung: n^* bzw. $\bar{n}$.

Generatoren: $[\exp(i\phi^a T^a)]^* = \exp(-i\phi^a [T^a]^*) \Rightarrow D(T^a) = -(T^a)^*$.

NB. $[T^a, T^b] = if^{abc} T^c \Rightarrow [(-T^a)^*, (-T^b)^*] = i f^{abc} (-T^c)^*$

$\Rightarrow$ die Strukturkonstanten sind unabhängig von der Darstellung!

<u>Adjungierte Darstellung</u>:

$d = \dim$

Die Basisvektoren von V sind jetzt Matrizen, und zwar T^a!

$v \equiv \sum_{a=1}^{\dim} v^a T^a$, $v^a \in \mathbb{R}$; $v' \equiv D(g)(v) \equiv g\, v\, g^{-1}$.

Diese Abbildung ist linear $[D(g)(v+w) = D(g)(v) + D(g)(w)]$
und bijektiv $[v = g^{-1} v' g]$.

Der neue v' hat die gleichen Eigenschaften als der alte v [$v^\dagger = \eta v \eta^{-1}$; wir können hier vermuten, daß η^{-1} existiert, und daß $\eta^\dagger = \eta$; vgl. Übungen].

Betrachten wir "kleine Transformationen" $[g = e^{i\theta^a T^a},\ \theta^a \ll 1]$
wird $v' = \sum_a (v')^b T^b$, wo $(v')^b = v^b + i\theta^a (F^a)^{bc} v^c + O(\theta^2)$.

Hier sind die F^a die Generatoren [vgl. S. 9-10]:
(dim)x(dim)-Matrizen, mit Komponenten $(F^a)^{bc} = -if^{abc}$!

[vgl. Übungen].

Wieder gilt $[F^a, F^b] = i f^{abc} F^c$!

[vgl. Übungen]

Weitere Definitionen

* Zwei Darstellungen D_1 und D_2 sind <u>äquivalent</u>, falls es eine lineare invertierbare Abbildung S gibt ("Similaritätstransformation"), so daß

$$D_2(g) = S\, D_1(g)\, S^{-1} \quad \forall\, g \, .$$

In diesem Fall handelt es sich im Wesentlichen um einen Basiswechsel:

$$D_2(g)\, S = S\, D_1(g)$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, shift left, "S"] \arrow[d, "D_1"'] & V_2 \arrow[l, shift left, "S^{-1}"] \arrow[d, "D_2"] \\ V_1 \arrow[r, shift left, "S"] & V_2 \arrow[l, shift left, "S^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$; \quad \hat{e}_i^{(2)} = S\, \hat{e}_i^{(1)}$$

Für Generatoren:

$$T_2^a = S\, T_1^a\, S^{-1} \qquad \forall\, a = 1, \dots, \dim \, .$$

* Wir bezeichnen $\operatorname{Kern}(D) = \{ g \in G \mid D(g) = \mathbb{1}_{d \times d} \}$.

Falls $\operatorname{Kern}(D) = \{e\}$, ist die Darstellung <u>"treu"</u>.

Dann gilt: $g_1 \neq g_2 \Rightarrow D(g_1) \neq D(g_2)$.

[Vermute $D(g_1) = D(g_2)$
$\Rightarrow D(g_1 g_2^{-1}) = D(g_1) D(g_2^{-1}) = D(g_2) D(g_2^{-1})$
$= D(g_2 g_2^{-1}) = D(e) = \mathbb{1}$
$\Rightarrow g_1 g_2^{-1} = e \Rightarrow g_1 = g_2$.]

* Falls die Matrizen $D(g)$ unitär sind, ist die Darstellung <u>unitär</u>.

[Die Gruppe G selbst braucht nicht unbedingt unitär zu sein!]

In der Tat kann man für alle (endlichen) diskreten und alle "kompakten" (vgl. später) kontinuierlichen Gruppen ein positiv definites Skalarprodukt wählen, wobei D unitär ist!

[Sei $\langle v | w \rangle = \sum_{i=1}^{d} v_i^* w_i$. Definieren wir

$$\langle\!\langle v | w \rangle\!\rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle D(g) v \,|\, D(g) w \rangle \, .$$

Dann gilt

$$\langle\!\langle v \,|\, D^\dagger(g') D(g') w \rangle\!\rangle = \langle\!\langle D(g') v \,|\, D(g') w \rangle\!\rangle$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle D(g) D(g') v \,|\, D(g) D(g') w \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle D(g g') v \,|\, D(g g') w \rangle$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g'' \in G} \langle D(g'') v \,|\, D(g'') w \rangle = \langle\!\langle v | w \rangle\!\rangle \quad \Rightarrow D^\dagger(g') D(g') = \underline{\mathbb{1}} \, !$$

]

Im Folgenden werden wir meistens unitäre Darstellungen betrachten.

Die Generatoren sind dann **hermitesch**.

Weitere Beispiele von Darstellungen

* Direkte Summe von Darstellungen

Seien D_1, D_2 zwei Darstellungen der Gruppe G in den Räumen V_1, V_2. Durch Bildung der direkten Summe $V_1 \oplus V_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_i \in V_i\}$, mit $(v_1, v_2) \equiv (v_1, 0) + (0, v_2)$, kommt man zu einer neuen Darstellung von G:

$$D_1 \oplus D_2(g)\,(v_1, v_2) \equiv (D_1(g)v_1, 0) + (0, D_2(g)v_2).$$

Als Basisvektoren können $\{(\hat{e}_i, 0)\}$ zusammen mit $\{(0, \hat{e}_j)\}$ gewählt werden:

$$(v, v') = \left(\sum_{i=1}^{d_1} v_i \hat{e}_i, \sum_{j=1}^{d_2} v'_j \hat{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{d_1} v_i\,(\hat{e}_i, 0) + \sum_{j=1}^{d_2} v'_j\,(0, \hat{e}_j).$$

Die Dimension der Darstellung ist daher $d_{D_1 \oplus D_2} = d_1 + d_2$.

In dieser Basis ist $D_1 \oplus D_2$ blockdiagonal: $\left(\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array}\right)$

Eine Darstellung ist <u>irreduzibel</u>, wenn es keine invarianten Unterräume gibt.

Eine Darstellung ist <u>vollreduzibel</u>, wenn D äquivalent zu $D_1 \oplus D_2 \oplus \ldots$ ist, mit irreduziblen D_i.

* Direktes Produkt von Darstellungen

Durch Bildung des direkten Produktes $V_1 \otimes V_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_i \in V_i\}$, mit $(\alpha_1 v_1 + \beta_1 w_1, v_2) \equiv \alpha_1 (v_1, v_2) + \beta_1 (w_1, v_2)$, $(v_1, \alpha_2 v_2 + \beta_2 w_2) = \alpha_2 (v_1, v_2) + \beta_2 (v_1, w_2)$, kommt man auch zu einer neuen Darstellung von G:

$$D_1 \otimes D_2(g)\,(v_1, v_2) \equiv (D_1(g)v_1, D_2(g)v_2).$$

Als Basisvektoren können $\{(\hat{e}_i, \hat{e}_j)\}$ dienen:

$$(v, v') = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} v_i v'_j\,(\hat{e}_i, \hat{e}_j).$$

Die Dimension der Darstellung ist daher $d_{D_1 \otimes D_2} = d_1 \cdot d_2$.

Das Problem für <u>Ausreduktion</u>: schreibe $D_1 \otimes D_2$ als eine Summe,

$$D_1 \otimes D_2 \overset{!}{=} D_a \oplus D_b \oplus D_c \oplus \ldots$$

Das heißt, finde alle invarianten Unterräume!