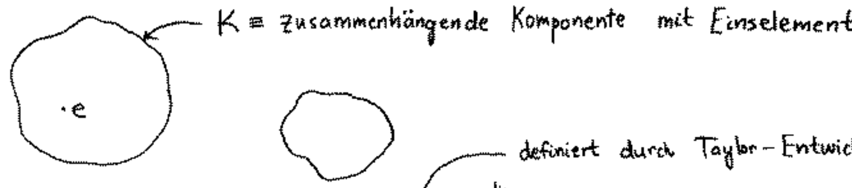
2.3 Lie-Gruppe $\longleftrightarrow$ Lie-Algebra

Betrachten wir Invarianzgruppen mit der Eigenschaft $A^{+}\eta A = \eta$ {und vielleicht auch $\det A = 1$}.

Gruppenmannigfaltigkeit:



Behauptung: Jede Matrix $A \in K$ kann als $A = \exp\left(i\sum_{a=1}^{\dim}\theta^a T^a\right)$ (definiert durch Taylor-Entwicklung) geschrieben werden, wobei $\theta^a \in \mathbb{R}$, $\dim$ = Dimension der Gruppe, und T^a sind "Generatoren", d.h. $n\times n$-Matrizen mit der Eigenschaft $(T^a)^{+}\eta - \eta T^a = 0$ {sowie $\mathrm{Sp}[T^a] = 0$ falls $\det A = 1$}. (Diese Schreibweise ist allerdings nicht eindeutig.)

Schreiben wir $\Theta \equiv \sum_a \theta^a T^a$, und definieren eine Abbildung $\mathbb{R}^{\dim} \to M(n,\mathbb{C})$, $\{\theta^a\} \mapsto \exp(i\Theta)$. Zeigen wir zuerst, daß $\exp(i\Theta) \in K$. Sei $f(\lambda) \equiv \exp(i\lambda\Theta)$, $\lambda \in [0,1]$, und $c(\lambda) \equiv [f(\lambda)]^{+}\eta\,[f(\lambda)]$. Dann gilt:

$$\frac{d}{d\lambda}c(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left[\exp(-i\lambda\Theta^{+})\,\eta\,\exp(i\lambda\Theta)\right]$$

$$= -i\exp(-i\lambda\Theta^{+})\underbrace{\left[\Theta^{+}\eta - \eta\Theta\right]}_{0}\exp(i\lambda\Theta) = 0.$$

$\Rightarrow$ $c(\lambda)$ ist eine Konstante

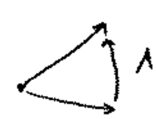
$\Rightarrow$ $c(\lambda) = c(0) = \eta \quad \forall\lambda \qquad \Rightarrow f(\lambda) \in K \quad \forall\lambda$. $\square$

{Weiterhin, $\det[\exp(i\Theta)] = \prod_{m=1}^{n}\exp(i\lambda_m) = \exp\left(i\sum_{m=1}^{n}\lambda_m\right) = \exp\left(i\,\mathrm{Sp}[\Theta]\right) = 1$, falls $\mathrm{Sp}[\Theta] = 0$.

nach Diagonalisierung von Θ (aber gilt auch für nichtdiagonalisierbare Θ) — Eigenwerte von Θ}

Aber kann jedes $g \in K$ mit dieser Abbildung erreicht werden? [D.h. ist sie surjektiv?] Beweis nicht ganz einfach, aber die Idee ist ~verständlich. Zusammenhängigkeit $\Rightarrow$ für $\forall g \in K$ $\exists f: [0,1] \mapsto K$, $\lambda \mapsto f(\lambda)$, mit $f(0) = \mathbb{1}$, $f(1) = g$. Für $\lambda \ll 1$, $f(\lambda) \equiv \mathbb{1} + \lambda\cdot i\Theta + \mathcal{O}(\lambda^2)$. $[f(\lambda)]^{+}\eta\,[f(\lambda)] = \eta \Rightarrow \Theta^{+}\eta - \eta\Theta = 0$. Wie immer mit linearen Objekten, kann jedes Element als Linearkombination der Basisobjekte geschrieben werden $\Rightarrow \Theta = \sum_a \theta^a T^a$, mit $(T^a)^{+}\eta - \eta T^a = 0$.

Auf der anderen Seite kann $f(1) \equiv A$ als eine Transformation gesehen werden: $v \mapsto Av$. (S. 6) Wahrscheinlich kann eine "große" Transformation durch mehrere "kleine" Transformationen erreicht werden:



$$g = f(1) = f(\tfrac{1}{2})\cdot f(\tfrac{1}{2}) = \lim_{N\to\infty}\left[f(\tfrac{1}{N})\right]^N = \lim_{N\to\infty}\left[\mathbb{1} + \frac{i\Theta}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)\right]^N = \exp(i\Theta). \qquad \text{"}\square\text{"}$$

Es ist viel einfacher, die Matrizen $\Theta = \sum_{a=1}^{\dim} \Theta^a T^a$ als die Gruppenelemente $g(\Theta)$ zu studieren, weil sie einen reellen linearen Vektorraum bilden, mit T^a als die Basisvektoren. Wir nennen diesen Vektorraum eine "Lie-Algebra". Die Notation:

$$\text{Gruppe } SU(n) \longrightarrow \text{Algebra } su(n), \text{ usw.}$$

"Algebra" heißt, daß man auch eine "Multiplikation" zweier Elemente $\in su(n)$ definieren kann, nicht nur die Addition $\Theta + \Theta'$. Dies kommt auf folgender Weise zustande:

Betrachten wir zwei Elemente, $A \equiv e^{i\Theta^a T^a}$, $B \equiv e^{i\varphi^a T^a}$.

[Einstein konvention: $\Theta^a T^a \equiv \sum_{a=1}^{\dim} \Theta^a T^a$.]

Das Produkt gehört auch zur $K \Rightarrow A \cdot B = C \equiv e^{i\xi^a T^a}$.

Reihenentwicklung zur zweiten Ordnung:

$$\left[\mathbb{1} + i\Theta^a T^a - \tfrac{1}{2}\Theta^a\Theta^b T^a T^b\right]\cdot\left[\mathbb{1} + i\varphi^a T^a - \tfrac{1}{2}\varphi^a\varphi^b T^a T^b\right] = \mathbb{1} + i\xi^a T^a - \tfrac{1}{2}\xi^a\xi^b T^a T^b + \mathcal{O}(\Theta,\varphi,\xi)^3$$

$$\mathbb{1} + i(\Theta^a + \varphi^a)T^a - \tfrac{1}{2}(\Theta^a\Theta^b + \varphi^a\varphi^b + 2\Theta^a\varphi^b)T^a T^b = \mathbb{1} + i\xi^a T^a - \tfrac{1}{2}\xi^a\xi^b T^a T^b + \mathcal{O}(\Theta,\varphi,\xi)^3$$

$$T^a T^b = \tfrac{1}{2}\{T^a, T^b\} + \tfrac{1}{2}[T^a, T^b]$$
$$\xi^a\xi^b T^a T^b = \tfrac{1}{2}\xi^a\xi^b\{T^a, T^b\}$$
$$2\Theta^a\varphi^b\{T^a,T^b\} = (\Theta^a\varphi^b + \Theta^b\varphi^a)\{T^a,T^b\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{1} + i(\Theta^a + \varphi^a)T^a - \tfrac{1}{4}(\Theta^a+\varphi^a)(\Theta^b+\varphi^b)\{T^a,T^b\} - \tfrac{1}{2}\Theta^a\varphi^b[T^a,T^b]$$
$$= \mathbb{1} + i\xi^a T^a - \tfrac{1}{4}\xi^a\xi^b\{T^a,T^b\} + \mathcal{O}(\Theta,\varphi,\xi)^3$$

Dies kann nur erfüllt werden, falls $\Theta^a\varphi^b[T^a,T^b] \propto i\xi^a T^a$! So muß es also sein!
Wir schreiben

$$[T^a, T^b] \equiv i f^{abc} T^c \quad ; \quad f^{abc} \equiv \underline{\text{Strukturkonstante}}.$$

Damit ist $\quad -\tfrac{1}{2}\Theta^a\varphi^b[T^a,T^b] = -\tfrac{i}{2} f^{abc}\Theta^a\varphi^b T^c$, und

$$\xi^a = \Theta^a + \varphi^a - \tfrac{1}{2} f^{cba}\Theta^c\varphi^b + \mathcal{O}(\Theta,\varphi)^3. \qquad (*)$$

Fazit: die "Multiplikation" wird durch den Kommutator definiert, und die Strukturkonstanten bestimmen, was in der Vertauschung passiert. Die Strukturkonstanten sind reell (vgl. Gl. (*)).

Einige Eigenschaften der Generatoren und Strukturkonstante

* Die Multiplikation einer Lie-Algebra hat im Allgemeinen die Eigenschaften

  (i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (Antisymmetrie)

  (ii) $[[X,Y], Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (Jacobi-Identität)

* Linearkombinationen von T^a können auch als Basisvektoren dienen. Die Basis ist orthogonal, falls $Sp[T^aT^b] \propto \delta^{ab}$. In meisten Fällen $[U(n), SU(n), O(n), SO(n), \ldots]$ können die T^a auch so normiert werden, daß

$$Sp[T^aT^b] = \frac{\delta^{ab}}{2} .$$

* Natürlich muß die Basis auch komplett sein: jedes Element der Algebra kann als eine Linearkombination von T^a geschrieben werden. Dies führt zu einer Vollständigkeitsrelation; für die Generatoren von $SU(n)$ [bzw $su(n)$], z.B.,

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} T^a_{ij} T^a_{kl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{n}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \qquad \text{(vgl. Übungen)} .$$

  Extrem wertvoll!

* Von $Sp[T^aT^b] = \delta^{ab}/2$ und $[T^a,T^b] = if^{abc}T^c$ folgt

$$f^{abc} = -2i\, Sp\{[T^a,T^b]T^c\} .$$

  Daher ist f^{abc} antisymmetrisch in $a \leftrightarrow b$, aber auch $a \leftrightarrow c$, $b \leftrightarrow c$! (vgl. Übungen)
  Von Jacobi-Identität folgt

$$f^{abd}f^{cde} + f^{bcd}f^{ade} + f^{cad}f^{bde} = 0 \quad \text{für } a,b,c,e \in \{1,\ldots,\dim\} .$$

  (vgl. Übungen)

* Falls es einen Generator gibt, der mit allen anderen vertauscht, haben wir eine "abelsche Unteralgebra". Falls nicht, heißt die Algebra "halbeinfach".

* Beispiel: $su(2)$; dim = 3

  Pauli-Matrizen: $\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

  Generatoren: $T^a = \frac{\tau^a}{2}$; $Sp[T^aT^b] = \frac{\delta^{ab}}{2}$; $(T^a)^\dagger = T^a$; $Sp[T^a] = 0$.

  Vertauschung: $[T^a, T^b] = i\varepsilon^{abc}T^c$; ε^{abc} = "Levi-Civita-Tensor"

  Halbeinfach.

— ∘ —

Appendix: Die Campbell-Baker-Hausdorff-Formel,

oder wie die Vertauschungsrelationen der Lie-Algebra die Gruppenmultiplikation der Lie-Gruppe im Allgemeinen bestimmen,

$$e^{tX} e^{tY} = e^{\sum_{n=1}^{\infty} t^n C_n(X,Y)} \quad ; \quad \text{Was sind die } C_n(X,Y) \text{ ?}$$

$$e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n \quad ; \quad e^{tY} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} Y^m$$

$$e^{tX} e^{tY} = \left[\begin{matrix} s = m+n \\ n = s-m \end{matrix} \right] \quad 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{s} \frac{t^s}{m!\,(s-m)!} X^{s-m} Y^m$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Betrachten wir die Ausdrücke bis zur dritten Ordnung in t.

$$z = t(X+Y) + t^2\left(\frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2\right) + t^3\left(\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2Y + \frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{6}Y^3\right) + \dots$$

$$\begin{aligned} z^2 = t^2(X^2 + XY + YX + Y^2) + t^3 \Big(& \frac{1}{2}X^3 + X^2Y + \frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{2}YX^2 + YXY + \frac{1}{2}Y^3 \\ & + \frac{1}{2}X^3 + XYX + \frac{1}{2}Y^2X + \frac{1}{2}X^2Y + XY^2 + \frac{1}{2}Y^3 \Big) + \dots \end{aligned}$$

$$z^3 = t^3\left(X^3 + X^2Y + XYX + XY^2 + YX^2 + YXY + Y^2X + Y^3\right)$$

$$\begin{aligned} z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} = \; & t\,(X+Y) \\ & + t^2\left(\frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}XY - \frac{1}{2}YX - \frac{1}{2}Y^2\right) \\ & + t^3\Big(\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2Y + \frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{6}Y^3 \\ & \quad - \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{4}X^2Y - \frac{3}{4}XY^2 - \frac{1}{2}Y^3 \\ & \quad - \frac{1}{4}YX^2 - \frac{1}{2}YXY - \frac{1}{2}XYX - \frac{1}{2}Y^2X \\ & \quad + \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{3}X^2Y + \frac{1}{3}XY^2 + \frac{1}{3}Y^3 \\ & \quad + \frac{1}{3}YX^2 + \frac{1}{3}YXY + \frac{1}{3}XYX + \frac{1}{3}Y^2X \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad C_1(X,Y) &= X+Y \\ C_2(X,Y) &= \frac{1}{2}[X,Y] \\ C_3(X,Y) &= \frac{1}{12}\left(X^2Y + XY^2 + YX^2 + Y^2X - 2YXY - 2XYX\right) \\ &= \frac{1}{12}\left([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]\right) \end{aligned}$$

Auch C_n, $n \geq 4$, werden eindeutig von den Kommutatoren bestimmt!