2.2 Kontinuierliche Gruppen

Die Anzahl der Gruppenelemente kann auch unendlich sein, und zwar entweder abzählbar [z. B. $\mathbb{Z}$, "$\cdot$" = Addition] oder unabzählbar.

Falls die Gruppenelemente durch n reelle Koordinaten parametrisiert werden können, geht es um eine kontinuierliche Gruppe der Dimension n. Die Elemente sind dann der Form $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Betrachten wir die Verknüpfung zweier Elemente,

$$g(x) \cdot g(y) \equiv g(z) \quad , \quad \text{wobei } z \equiv f_1(x,y) \,,$$

und die Inverse eines Elements,

$$[g(x)]^{-1} \equiv g(w) \quad , \quad \text{wobei } w \equiv f_2(x) \,.$$

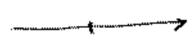
Für eine kontinuierliche Gruppe verlangt man, daß die Funktionen f_1, f_2 kontinuierlich sind.

Wenn f_1, f_2 sogar analytisch sind, geht es um eine Lie-Gruppe.
Wir werden uns meistens mit Lie-Gruppen beschäftigen.

Ein Raum mit einem Koordinatensystem ist eine "Mannigfaltigkeit".
Die Mannigfaltigkeit kann bestimmte Eigenschaften haben — zusammenhängend, einfach zusammenhängend, usw — und verlangt im Allgemeinen mehrere Koordinatensysteme für ihre vollständige Beschreibung: nur lokal sehen die Koordinaten wie ein Teil von $\mathbb{R}^n$ aus.

Beispiele:

	Gruppe	Verknüpfung	Dimension
*	$\mathbb{R}$	$+$	1
*	$\mathbb{R}^n = \{(r_1, \dots, r_n)\}$	$+$	n
*	$\mathbb{C}^n$	$+$	$2n$
*	$M(n, \mathbb{R})$ = $n \times n$ Matrizen, mit Elemente $\in \mathbb{R}$	$+$	n^2
*	$U(1) = \{ z \in \mathbb{C} \mid \lvert z \rvert = 1 \}$	$\times$	1

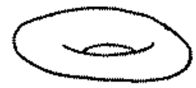


Hier $z = e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Geometrisch:

* $T^n = n$-Torus
  $= U(1) \times \dots \times U(1)$

$$(e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_n}) \cdot (e^{i\phi_1'}, \dots, e^{i\phi_n'}) = (e^{i\phi_1 + i\phi_1'}, \dots, e^{i\phi_n + i\phi_n'})$$

$T^2 =$



Ein wichtiges Beispiel sind <u>Matrixgruppen</u>, wobei Verknüpfung ≡ Matrixmultiplikation.

$$* \quad GL(n,\mathbb{R}) = \{ A \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \} \quad ; \quad \dim GL(n,\mathbb{R}) = n^2$$

$$* \quad GL(n,\mathbb{C}) = \{ A \in M(n,\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0 \} \quad ; \quad \dim GL(n,\mathbb{C}) = 2n^2$$

NB: $\dim GL(n,\mathbb{R}) = \dim M(n,\mathbb{R})$, aber die Koordinatenwahl ist viel schwieriger, weil die Bedingung $\det A \neq 0$ einen komplizierten Teil von $\mathbb{R}^{n^2}$ ausschließt!

$$* \quad SL(n,\mathbb{R}) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \} \quad ; \quad \dim = n^2 - 1$$

$$* \quad SL(n,\mathbb{C}) = \{ A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \det A = 1 \} \quad ; \quad \dim = 2(n^2-1)$$

(weil es zwei Bedingungen gibt: $\mathrm{Re}[\det A] = 1$, $\mathrm{Im}[\det A] = 0$.)

Diese Gruppen besitzen Untergruppen, die sehr wichtig in der Physik sind. Besonders ist dies der Fall für <u>Invarianzgruppen</u>. Betrachten wir den Skalarprodukt

$$(v,w) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} v_i^* \, \eta_{ij} \, w_j \quad ; \quad v,w \in \mathbb{C}^n \quad ; \quad v_i, w_i \text{ sind die Komponente.}$$

v_i^* ← komplexkonjugiert [in deutscher Literatur häufig $\bar{v}_i$]

Jetzt wird verlangt:

$$(Av, Aw) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} A_{ij}^* v_j^* \eta_{ik} A_{kl} w_l \equiv (v,w) \quad , \text{ für beliebige } v,w.$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i,k=1}^{n} A_{ij}^* \eta_{ik} A_{kl} = \eta_{jl} \qquad \text{für alle } j,l \in \{1,\dots,n\}$$

$$\Rightarrow \quad A^\dagger \eta A = \eta \qquad \text{wobei} \quad A^\dagger \equiv (A^*)^T$$

$$[A^\dagger]_{ji} \equiv A_{ij}^*$$

$$\eta \equiv \text{"der metrische Tensor"}$$

Die Matrizen A bilden eine Gruppe:

(i) $A^\dagger \eta A = \eta$ & $B^\dagger \eta B = \eta$

$\Rightarrow (AB)^\dagger \eta AB = B^\dagger A^\dagger \eta A B = B^\dagger \eta B = \eta$

(iii) $e = \mathbb{1}_{n\times n}$; $\mathbb{1} \eta \mathbb{1} = \eta$

(iv) $A^\dagger \eta A = \eta \quad | \cdot A^{-1}$

$(A^{-1})^\dagger \cdot | \quad A^\dagger \eta = \eta A^{-1}$

$\eta = (A^{-1})^\dagger \eta (A^{-1})$ $\square$.

Beispiele:

* $O(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \eta = \mathbb{1}_{n \times n} \}$

$A^* = A \Rightarrow A^+ = A^T \Rightarrow A^T A = \mathbb{1}$ "orthogonale Matrizen"

$O(n)$ ist eine Untergruppe, weil es gilt:

(a) $(AB)^T(AB) = B^T A^T A B = B^T B = \mathbb{1}$, falls $A, B \in O(n)$.

(b) $A^T A = \mathbb{1} \Rightarrow A^T = A^{-1} \Rightarrow \mathbb{1} = (A^{-1})^T (A^{-1})$.

Was ist die Dimension?

$$(A^T A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{kj} \equiv \delta_{ij} \quad ; \; i,j \in \{1, \dots, n\}$$

$i = j \Rightarrow n$ Gleichungen

$i > j \Rightarrow \frac{1}{2} n(n-1)$ Gleichungen

$i < j \Rightarrow$ nichts Neues

$\Rightarrow n^2 - \frac{1}{2} n(n-1) - n = \frac{1}{2} n(n-1)$ unabhängige Parameter

$\Rightarrow \dim = \frac{1}{2} n(n-1)$

* $SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = +1 \}$.

$SO(n)$ ist eine Untergruppe, weil es gilt:

(a) $\det(AB) = \det A \det B = 1$

(b) $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1} = 1$.

$\dim SO(n) = \frac{1}{2} n(n-1)$ (vgl. Übungen)

* $U(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \eta = \mathbb{1}_{n \times n} \}$ "unitäre Matrizen"

$\dim U(n) = n^2$ (vgl. Übungen)

* $SU(n) = \{ A \in U(n) \mid \det A = 1 \}$

$\dim SU(n) = n^2 - 1$ (vgl. Übungen)

* $O(3,1) = \{ A \in GL(4, \mathbb{R}) \mid \eta = \mathrm{Diag}(-1, 1, 1, 1) \}$ "Lorentzgruppe"

$\dim O(3,1) = \mathrm{Dim}\, O(4) = 6$.

Betrachten wir genauer die Gruppe SU(2)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^+ = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

$$A^+A = \begin{pmatrix} |a|^2+|c|^2 & a^*b+c^*d \\ b^*a+d^*c & |b|^2+|d|^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \; \det A = ad-bc = 1 .$$

$$\Leftrightarrow \quad |a|^2+|c|^2 = |b|^2+|d|^2 = 1 \quad \& \quad b^*a+d^*c = 0 \quad \& \quad ad-bc = 1 .$$

(i) $a \neq 0 \quad \rightarrow \quad b^* = -\frac{d^*c}{a} \qquad b = -d\frac{c^*}{a^*}$

$$ad-bc = \frac{d}{a^*}\left(|a|^2+|c|^2\right) = 1 \qquad \Rightarrow d = a^*$$
$$\Rightarrow b = -c^*$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |a|^2+|b|^2 = 1 .$$

(ii) $a = 0 \qquad \begin{pmatrix} |c|^2 & c^*d \\ d^*c & |b|^2+|d|^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\&\; \det A = -bc = 1$

$$\Rightarrow \quad d = 0 \qquad |b| = |c| = 1 \qquad c = -\frac{1}{b} = -\frac{bb^*}{b} = -b^*$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^* & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |b|^2 = 1 .$$

Schreiben wir $x_1 = \mathrm{Re}\, a$, $x_2 = \mathrm{Im}\, a$, $x_3 = \mathrm{Re}\, b$, $x_4 = \mathrm{Im}\, b$, erhalten wir die Parametrisierung

$$A = \begin{pmatrix} x_1+ix_2 & x_3+ix_4 \\ -x_3+ix_4 & x_1-ix_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1 .$$

Definition : n-Sphäre $S^n \equiv \left\{ (x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$.

Also : geometrisch ist SU(2) wie S^3.

[$\rightarrow$ zusammenhängend, einfach zusammenhängend, usw.]

Seite 5: geometrisch ist U(1) wie S^1.

Es zeigt sich, daß S^1 und S^3 die einzigen Sphären sind, die als Gruppenmannigfaltigkeiten dienen können!

Jeder n-Torus T^n erlaubt aber eine Gruppenstruktur (S.5).

—— o ——