1. Einführung

Es gibt Symmetrien in alles was wir sehen können, d.h. in Zuständen [z.B. Kristalle, Schneeflocken, ...]. Es gibt aber auch Symmetrien, oder Invarianzen, in der Dynamik der Zuständen, d.h. in Naturgesetzen. [z.B. Unabhängigkeit vom Ort, Zeitpunkt, Bewegungsrichtung, ...].

> Die möglichen Symmetrien der Zuständen werden weitgehend durch die Invarianzen der Naturgesetzen bestimmt, ohne daß wir selbst die genaue Form der Naturgesetzen kennen brauchen! Dies macht die mathematische Behandlung der Symmetrien zu einem wichtigen Werkzeug für die Physik!

Um die Sache genauer auszudrücken, erinnern wir uns an die Struktur der Quantenmechanik:

- Zustände $|\Psi\rangle$ bilden einen Vektorraum V [Hilbert-Raum].
  $[\ |\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle \in V \Rightarrow \alpha|\Psi_1\rangle + \beta|\Psi_2\rangle \in V\ ,\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}\ ]$
  Es gibt einen Skalarprodukt $(\cdot,\cdot) : V \otimes V \mapsto \mathbb{C}$.
  Wir bezeichnen $(|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle) \equiv \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle$. Es gilt $\langle\Psi_2|\Psi_1\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle^*$.

- Physikalische Größen sind Operatoren auf V, d.h. Abbildungen $V \mapsto V$.
  Der wohl wichtigste Operator ist der Hamilton-Operator $\hat{H}$.
  Die Schrödinger-Gleichung: $\quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle$

- Energie-Eigenzustände: $\hat{H}|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle$. Die $|\Psi_n\rangle$ sind die "stabilen", observablen Zuständen.

- Physikalische Eigenschaften eines Zustandes werden durch die Erwartungswerte verschiedener Operatoren charakterisiert.

Symmetrien gibt es, falls man Operatoren $\hat{Q}_i$ finden kann, $[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = 0$, die mit $\hat{H}$ vertauschen: $[\hat{H}, \hat{Q}_i] = 0$. Die Operatoren $\hat{H}, \hat{Q}_i$ haben dann gleichzeitige Eigenzustände. Das heißt, die möglichen Entartungen der Energie-Eigenzustände hängen davon ab, was für Eigenzustände $\hat{Q}_i$ besitzen!

Warum gibt es in diesem Fall "Symmetrien"?

(i) Die entarteten Eigenzustände sehen ähnlich aus.

(ii) Betrachten wir die Transformation $\hat{H}' \equiv e^{i\alpha \hat{Q}_i} \hat{H} e^{-i\alpha \hat{Q}_i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, so bleibt $\hat{H}$ invariant: $\hat{H}' = \hat{H}$.

(iii) $\langle \psi | \hat{Q}_i | \psi \rangle$ ist eine Erhaltungsgröße: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi | \hat{Q}_i | \psi \rangle = \langle \psi | [\hat{Q}_i, \hat{H}] | \psi \rangle = 0$.

Das Noether-Theorem $\Rightarrow$ $\exists$ eine Symmetrie.

Wie hängt dies mit der Mathematik zusammen?

* Die Transformationen, in denen $\hat{H}$ invariant bleibt
  $\Leftrightarrow$ Elemente einer Gruppe.

* Die entarteten Mengen der Eigenzustände
  $\Leftrightarrow$ invariante Unterräume von V
  $\Leftrightarrow$ irreduzible Darstellungen der Gruppe.

Und über irreduzible Darstellungen gibt es viele allgemeine Aussagen, z.B.:

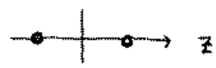
(a) diskrete Gruppen endlicher Ordnung
$\Rightarrow$ endliche Menge endlichdimensionale Darstellungen
$\Rightarrow$ endliche Entartungen $\left(\sum_{\text{Darstellungen}} (\text{Entartungen})^2 = |G| \right)$

(b) kontinuierliche kompakte Gruppen
$\Rightarrow$ unendliche Menge endlichdimensionale Darstellungen
$\Rightarrow$ die beobachteten Entartungen können auf verborgene kontinuierliche Symmetrien hindeuten.

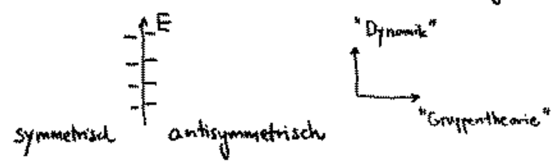
(c) kontinuierliche nichtkompakte Gruppen
$\Rightarrow$ unendlichdimensionale Darstellungen.

Beispiele

Symmetrien der Kristalle / Moleküle

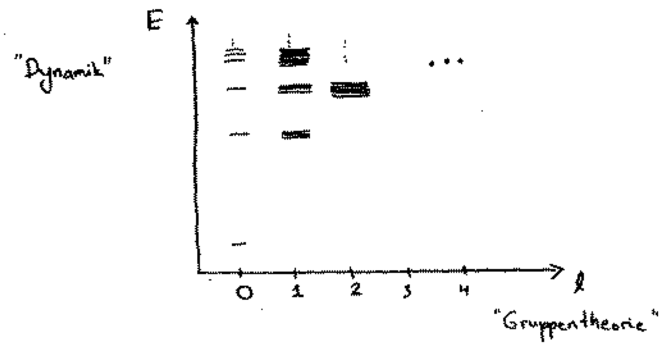


Diskrete Symmetrietransformationen: $z \to z$ und $z \to -z$.
Diese Gruppe hat zwei Arten von Darstellungen $\Leftrightarrow$ symmetrische und antisymmetrische Wellenfunktionen.
Beide sind eindimensional: keine Entartung.



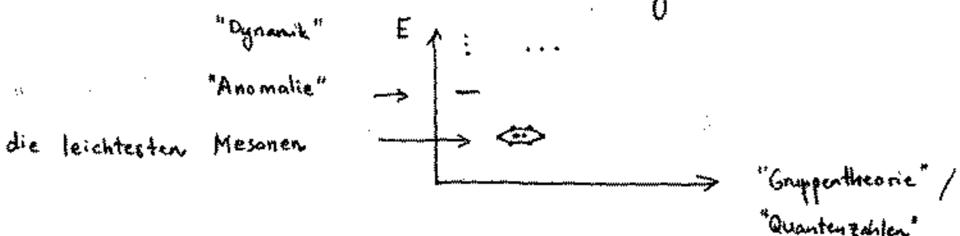
Wasserstoffatom

Keine externe Felder $\Rightarrow$ Drehsymmetrie
$\Rightarrow$ kontinuierliche kompakte Gruppe $SO(3)$
$\Rightarrow$ $(2l+1)$-dimensionale Darstellungen, $l = 0, 1, 2, \ldots$
$\Rightarrow$ $2l+1$-fache Entartungen



Innere Symmetrien in Teilchenphysik

Die Quarks u, d, s sind alle relativ leicht
$\Rightarrow$ kontinuierliche kompakte Gruppe $SU(3)$
$\Rightarrow$ Darstellungen mit bestimmten Dimensionen
$\Rightarrow$ Der "achtfache Weg".



Poincaré-Symmetrie in Teilchenphysik

Nicht kompakt, aber mit kompakten Untergruppen

$\Rightarrow$ die Teilchen haben sowohl kontinuierliche (Impuls) als auch diskrete (Spin) Eigenschaften.

— • —

["Integrierbare Systeme" $\approx$ so viele Symmetrien, daß es keinen Platz mehr für "Dynamik" gibt!]

2. Grundbegriffe

2.1. Diskrete Gruppen

Gruppe G = Menge von Elementen $g_1, g_2, \dots$ mit einer Verknüpfung "$\cdot$", so daß:

(i) $g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in G$

(ii) $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ [Assoziativität]

(iii) $e \cdot g = g \cdot e = g$ [$\exists$ Einselement]

(iv) $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$ [$\exists$ Inverse]

Ordnung einer Gruppe = $|G|$ = Anzahl der Elemente.

Eine Gruppe ist abelsch, falls $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \; \forall g_1, g_2 \in G$, andernfalls nichtabelsch.

Untergruppe $H \subset G$: $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in H$ & $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$.

Eine Gruppe kann durch eine Multiplikationstabelle definiert werden.

Z.B.: $|G| = 2$ $\quad G = \{e, a\}$

	e	a
e	e	a
a	a	?

$a \cdot a = a$?

$\Rightarrow a = ae = aaa^{-1} = aa^{-1} = e$ ↯

$\Rightarrow a \cdot a = e$!

Diese Gruppe wird als $\mathbb{Z}_2$ bezeichnet.

Eine mögliche "Realisation": $e \equiv +1$, $a \equiv -1$, $\cdot$ = Multiplikation.

Eine andere: Permutationen von zwei Elementen, S_2:

$$e = \begin{pmatrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \end{pmatrix}.$$

Die Gruppen G, G' sind isomorph ($G \cong G'$), falls es eine 1-1 Abbildung $f: G \to G'$ gibt mit $f(g_1) \cdot f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2)$.

Isomorphe Gruppen sind identisch, werden nur mit "verschiedenen Sprachen" beschrieben: $\mathbb{Z}_2 \cong S_2$.

Falls $f(g_1) \cdot f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2)$ gilt, aber f nicht 1-1 ist, sind die Gruppen homomorph.