

7.4 Masseloser Limes Klein-Paradoxon. [Schwabl 10.1, 11.6]

Im Kapitel 7.3 haben wir gelernt, dass im nichtrelativistischen Limes ("m → 0") die wesentliche Dynamik der Dirac-Gleichung durch einen zweikomponentigen Spinor dargestellt werden kann. Im Folgenden erfahren wir, dass auch im "gegenseitigen" Limes ("m → ∞") zweikomponentige Spinoren, wenn auch nicht dieselben, als Freiheitsgrade dienen können.

In der Weyl-Darstellung: (Seite 100)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_k \\ -\alpha_k & 0 \end{pmatrix}$$

Dirac-Gleichung (Seite 102):  $(i\hbar \not{\partial} - mc)\Psi = 0$ .

Wenn wir  $\Psi$  als

$$\Psi =: \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} \text{ jeweils zwei Komponente}$$

ausdrücken, und  $mc$  auf null setzen, erhalten wir

$$i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}D_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{D} \\ \mathbb{1}D_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbb{1}D_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{D})\Psi_R = 0 \\ (\mathbb{1}D_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{D})\Psi_L = 0 \end{cases}$$

D.h. zwei abgekoppelte Gleichungen für "Weyl-Spinoren"!

Viererstrom (Seite 102):

$$j^\mu = c \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = c \begin{pmatrix} \Psi_L^\dagger & \Psi_R^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 \gamma^\mu \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} ; \gamma^0 \gamma^k = \begin{pmatrix} -\alpha_k & 0 \\ 0 & \alpha_k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow j^0 = c (\Psi_L^\dagger \Psi_L + \Psi_R^\dagger \Psi_R) ; j^k = c (-\Psi_L^\dagger \alpha_k \Psi_L + \Psi_R^\dagger \alpha_k \Psi_R),$$

d.h. wieder abgekoppelte Beiträge.

Frage: Wie ist es möglich, dass wir jetzt lineare Differenzialgleichungen finden, obwohl  $\{\mathbb{1}, \alpha_k\}$  die Clifford-Algebra nicht erfüllen??

(vgl. Seite 100)

Korrespondenzprinzip (Seite 99):  $i\hbar \not{\partial}_\mu \Leftrightarrow p_\mu$

$$i\hbar (\mathbb{1}D_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{D}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix} =: M ; M^2 \neq p_\mu p^\mu \mathbb{1} \text{ aber } \underline{\underline{\det M}} = p_\mu p^\mu$$

D.h.  $Mv = 0$  besitzt nichttriviale Lösungen nur wenn  $p_\mu p^\mu = 0$ !

Im Allgemeinen:

Seite 102:  $\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  ;  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ .

Es gilt auch:  $(\gamma^5)^2 = -\underbrace{\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}_{(-1)} \underbrace{\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0}_{(-1)} = -\underbrace{(\gamma^0)^2}_{\mathbb{1}} \underbrace{(\gamma^1)^2}_{-\mathbb{1}} \underbrace{(\gamma^2)^2}_{-\mathbb{1}} \underbrace{(\gamma^3)^2}_{-\mathbb{1}} = \mathbb{1}$ .

Definiere  $P_L := \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)$  ;  $P_R := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)$ .

Diese sind "Projektoren":  $\mathbb{1} = P_L + P_R$  ;  
 $P_L^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{1} - \gamma^5 - \gamma^5 + (\gamma^5)^2) = P_L$  ;  $P_R^2 = P_R$   
 $P_L P_R = \frac{1}{4}(\mathbb{1} - \gamma^5 + \gamma^5 - (\gamma^5)^2) = 0$ .

Eigenwerte sind 0 oder 1:  $P_L (P_L |\psi\rangle) = (P_L P_L) |\psi\rangle = P_L |\psi\rangle = 1 (P_L |\psi\rangle)$   
 $P_L (P_R |\psi\rangle) = (P_L P_R) |\psi\rangle = 0 |\psi\rangle = 0 (P_R |\psi\rangle)$

Beispiele: \* Weyl-Darstellung:  $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$  ;  $\alpha_L = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ;  $\alpha_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ .  
 \* Standard-Darstellung:  $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$  ;  $\alpha_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$  ;  $\alpha_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ .

Es gilt auch:  $P_L \gamma^\mu = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu = \frac{1}{2} \gamma^\mu (\mathbb{1} + \gamma^5) = \gamma^\mu P_R$  ;  $P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$ .  
 $\gamma^5 P_L = \frac{1}{2}(\gamma^5 - \mathbb{1}) = -P_L$  ;  $\gamma^5 P_R = \frac{1}{2}(\gamma^5 + \mathbb{1}) = P_R$   
 Eigenwert von  $\gamma^5$  heißt "Chiralität".

Es folgt:  $(i\hbar \not{\partial} - mc) \Psi = 0$   
 $\Rightarrow \begin{cases} i\hbar \not{P}_L \not{\partial} \Psi - mc P_L \Psi = 0 \\ i\hbar \not{\partial} P_R \Psi - mc P_R \Psi = 0 \end{cases} \quad | \quad \Psi_L := P_L \Psi ; \Psi_R := P_R \Psi$   
 (Projection mit  $P_L$ )  $\Leftrightarrow i\hbar \not{\partial} \Psi_R - mc \Psi_L = 0$ .

Und ähnlich wenn mit  $P_R$  projiziert wird. Wenn dann wieder  $mc$  auf null gesetzt wird, koppeln  $\Psi_L$  und  $\Psi_R$  ab, und wir erhalten

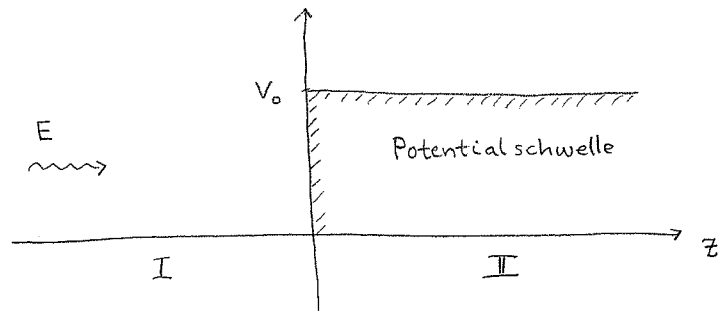
$$\begin{cases} i\hbar \not{\partial} \Psi_R = 0 & ; \Psi_R \text{ hat "rechtshändige Chiralität"} \\ i\hbar \not{\partial} \Psi_L = 0 & ; \Psi_L \text{ hat "linkshändige Chiralität"} \end{cases}$$

Bemerkung:

Es zeigt sich, dass  $\Psi_R$  und  $\Psi_L$  alleine die sogenannte Paritätssymmetrie verletzen. Dieses kommt in der Natur relativ selten vor; die häufigsten Wechselwirkungen, insbesondere Elektromagnetismus, koppeln zum Dirac-Spinor  $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$ .

(Vielleicht gibt es einen ähnlichen Grund dafür, dass bei Graphen Zwei "effektive" unabhängige Spinoren auftauchen, vgl. Seite 82?)

Klein-Paradoxon:  
(Klein 1929)



Nichtrelativistisch (QM I):  $0 < E < V_0$

⇒ Transmissionskoeffizient = 0,  
Reflexionskoeffizient = 1.

Weyl-Gleichung für  $\Psi_R$  mit  $\vec{A} = \vec{0}$ ;  $\partial_x \Psi_R = \partial_y \Psi_R = 0$ :

$$\begin{pmatrix} i\hbar(\partial_0 + \frac{iq}{\hbar c} A_0) + i\hbar\partial_z & 0 \\ 0 & i\hbar(\partial_0 + \frac{iq}{\hbar c} A_0) - i\hbar\partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{R1} \\ \Psi_{R2} \end{pmatrix} = 0$$

Suche nach einer stationären Lösung, mit Zeitabhängigkeit  $e^{-\frac{iEt}{\hbar}} = e^{-\frac{iEx^0}{\hbar}}$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{iE}{\hbar c} + \frac{iqA_0}{\hbar c}\right) \Psi_{R1} = -\partial_z \Psi_{R1} \\ \left(-\frac{iE}{\hbar c} + \frac{iqA_0}{\hbar c}\right) \Psi_{R2} = \partial_z \Psi_{R2} \end{cases}$$

Bereich I:

$$qA_0 := 0$$

$$\Rightarrow \Psi_{R1} = A e^{i\frac{Ez}{\hbar c}}; \quad \Psi_{R2} = B e^{-i\frac{Ez}{\hbar c}}$$

Strom (Seite 107):

$$J^1 = c \Psi_R^\dagger \alpha_1 \Psi_R = c (\Psi_{R1}^* \Psi_{R2} + \Psi_{R2}^* \Psi_{R1}) = c \left( A^* B e^{-\frac{2iEz}{\hbar c}} + B^* A e^{+\frac{2iEz}{\hbar c}} \right)$$

$$J^2 = c \Psi_R^\dagger \alpha_2 \Psi_R = c (-i \Psi_{R1}^* \Psi_{R2} + i \Psi_{R2}^* \Psi_{R1}) = ic \left( -A^* B e^{-\frac{2iEz}{\hbar c}} + B^* A e^{+\frac{2iEz}{\hbar c}} \right)$$

$$J^3 = c \Psi_R^\dagger \alpha_3 \Psi_R = c (\Psi_{R1}^* \Psi_{R1} - \Psi_{R2}^* \Psi_{R2}) = c (|A|^2 - |B|^2)$$

Bereich II:

$$qA_0 := V_0$$

Alles ist wie im Bereich I aber mit  $E \rightarrow E - V_0$ .

$$\Rightarrow \Psi_{R1} = C e^{i\frac{(E-V_0)z}{\hbar c}}; \quad \Psi_{R2} = D e^{-i\frac{(E-V_0)z}{\hbar c}}$$

$$J^3 = c (|C|^2 - |D|^2)$$

Anschlußbedingung:

Integriere Weyl-Gleichung über das Intervall  $z \in (0^-, 0^+)$ .

Es gibt keine Diracsche Delta-Funktion in  $qA_0$

$$\Rightarrow \Psi_R(0^-) = \Psi_R(0^+) \Rightarrow \begin{cases} C = A \\ D = B \end{cases}$$

Randbedingungen:

Interpretiere (?)\* positiven Beitrag zu  $J^3$  als „rechtslaufend“, negativen als „linkslaufend“. Ursprünglicher Strahl kommt vom links  $\Rightarrow |D|^2 = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow B = 0$ .

D.h. es gibt keinen linkslaufenden Strahl im Bereich I, und somit keine Reflexion; Transmissionskoeffizient = 1  $\neq$   $V_0$ !

Mit Masse:

Das Problem läßt sich auch mit  $mc \neq 0$  exakt lösen, vgl. Schwabl 10.2.4. Die Ergebnisse:

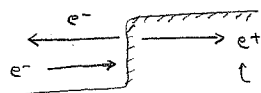
$$E - mc^2 > V_0 > 0 \Rightarrow \text{Reflexion \& Transmission möglich}$$

$$E + mc^2 > V_0 > E - mc^2 \Rightarrow \text{keine Transmission}$$

$$V_0 > \underbrace{E + mc^2}_{> 2mc^2} \Rightarrow \text{Reflexion \& Transmission möglich}$$

Erklärungsversuch:

Weil die überraschende Transmission nur bei  $V_0 > 2mc^2$  stattfinden kann, hat sie vielleicht etwas mit Paarerzeugung zu tun?



führt  $-V_0$ , weil Ladung entgegengesetzt!

(Oder mit „Helizität“: für chirale Fermionen ist nur ein Spin-Wert (bzgl. Bewegungsrichtung) möglich, und weil die vorhandene Wechselwirkung den Spin nicht umklappen kann, ist Rückwärtsbewegung nicht erlaubt.)

\*  $\Psi_{R1}$  mit Zeitabhängigkeit:  $A e^{i \frac{E}{\hbar c} (z-ct)} \Rightarrow$  „Welle mit  $z \approx ct$ “

$\Psi_{R2}$  —||— :  $B e^{-i \frac{E}{\hbar c} (z+ct)} \Rightarrow$  „Welle mit  $z \approx -ct$ “.

D.h. scheint auch im semiklassischen Limes zu funktionieren.