7.3 Nichtrelativistischer Limes [Schwabl 5.3.5.3, 9.1]

Das Ziel ist die Betrachtung des Limes $mc^2 \gg E$, wie beim Klein-Gordon-Feld auf Seite 98 aber diesmal ein wenig systematischer.
Dirac-Gleichung im klassischen elektromagnetischen Feld (Seite 102):

$$(i\hbar \not{D} - mc)\Psi = 0 \quad ; \quad \not{D} = \gamma^\mu D_\mu \; ; \quad D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \, .$$

Bei den Dirac-Matrizen benutzen wir die „Standard-Darstellung" (Seite 100):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} .$$

Der Spinor Ψ sei als

$$\Psi = \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix} \leftarrow \text{zweikomponentige Spinoren}$$

ausgedrückt. Es folgt:

$$\begin{cases} (i\hbar D_0 - mc)\theta + i\hbar \vec{\sigma}\cdot\vec{D}\,\chi = 0 \, , & (i) \\ -(i\hbar D_0 + mc)\chi - i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{D}\,\theta = 0 \, . & (ii) \end{cases}$$

Wir suchen wieder einmal nach einer stationären oder „fast" stationären Lösung, mit Zeitabhängigkeit $\sim \exp(-\frac{iEt}{\hbar})$ mit $E = mc^2 + E'$, $E' \ll mc^2$.
Formal kann dieses durch die folgenden Regeln implementiert werden:

$$i\hbar D_0 \sim \mathcal{O}(mc) \; ; \qquad i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{D} \sim \mathcal{O}(1) \quad \overset{!}{\Rightarrow} \quad i\hbar D_0 - mc \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{mc}\right)$$

(siehe (*))

$$\Rightarrow \quad \chi = -\frac{1}{2mc + \underbrace{i\hbar D_0 - mc}_{\le \mathcal{O}(1)}}\, i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{D}\,\theta = -\frac{i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{D}\,\theta}{2mc} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(mc)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ i\hbar D_0 - mc + \frac{\hbar^2}{2mc}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{D}\;\vec{\sigma}\cdot\vec{D} \right\}\theta = 0 \, . \qquad (*)$$

Hier:

$$* \quad i\hbar D_0 = \frac{i\hbar}{c}\partial_t - \frac{q}{c}A_0$$

$$* \quad \vec{\sigma}\cdot\vec{D}\;\vec{\sigma}\cdot\vec{D} = \sigma_j\sigma_k D_j D_k = (\delta_{jk}\mathbb{1} + i\epsilon_{jkm}\sigma_m) D_j D_k \quad ;$$

$$\epsilon_{mjk} D_j D_k = \underset{\text{antisymm.}}{\epsilon_{mjk}} \Big\{ \underset{\text{symm.}}{\partial_j\partial_k} + \frac{iq}{\hbar c}\big[(\partial_j A_k) + \underbrace{A_k\partial_j + A_j\partial_k}_{\text{symm.}}\big] - \frac{q^2}{\hbar^2c^2}\underset{\text{symm.}}{A_j A_k} \Big\}$$

$$= -\frac{iq}{\hbar c}(\nabla\times\vec{A})_m \qquad (A_k = -A^k \; !)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(i\hbar\partial_t - mc^2)\theta \approx \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right]^2 + qA_0 - \frac{q\hbar}{2mc}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \right\}\theta} \quad \text{„Pauli-Gleichung"}$$

D.h. die Dirac-Theorie enthält unbedingt Spin ($\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$), mit einem „gyromagnetischen Faktor" $g = 2$ ($\delta\hat{H} = -\frac{gq}{2mc}\hat{\vec{S}}\cdot\vec{B}$; vgl. Aufgabe 5.3).
[Nach Quantisierung des elektromagnetischen Feldes: $g = 2 + \frac{\alpha_{em}}{\pi} + \ldots$]

Nächste Ordnung: $\left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2c^2}\right)\right)$

Definiere $\hat{\pi} := -i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{D}$; $\hat{\varepsilon} := i\hbar D_0 - mc$.

Wir schreiben auch
$$\Theta =: \left(1 - \frac{\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi ,$$
mit der Begründung, dass φ dann „richtig" normiert ist:

$$\varphi \approx \left(1 + \frac{\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}\right)\Theta \quad ;$$
$$\varphi^+\varphi \approx \Theta^+\left(1+\frac{\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}\right)\left(1+\frac{\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}\right)\Theta \approx \Theta^+\left(1+\frac{\hat{\pi}^2}{4m^2c^2}\right)\Theta$$
$$\approx \Theta^+\Theta + \left(\frac{\hat{\pi}\Theta}{2mc}\right)^+\left(\frac{\hat{\pi}\Theta}{2mc}\right) \approx \Theta^+\Theta + \chi^+\chi = \psi^+\psi .$$

Es folgt (Seite 103): $\hat{\varepsilon}\,\Theta \overset{(i)}{=} \hat{\pi}\chi \overset{(ii)}{=} \hat{\pi}\dfrac{1}{2mc+\hat{\varepsilon}}\hat{\pi}\,\Theta$

entwickle

ersetze Θ durch φ

ersetze Θ durch φ

$$\Rightarrow \hat{\varepsilon}\left(1-\frac{\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi \approx \hat{\pi}\left(\frac{1}{2mc} - \frac{\hat{\varepsilon}}{4m^2c^2}\right)\hat{\pi}\left(1-\frac{\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi$$

operiere mit $1-\frac{\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}$ vom links

$$\Rightarrow \left(1-\frac{\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}\right)\hat{\varepsilon}\left(1-\frac{\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi \approx \frac{1}{2mc}\left(1-\frac{\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}\right)\left(\hat{\pi}^2 - \frac{\hat{\pi}\hat{\varepsilon}\hat{\pi}}{2mc}\right)\left(1-\frac{\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi .$$

Hier entwickeln wir auf beiden Seiten zur relativen Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2c^2}\right)$*.

Linke Seite: $\hat{\varepsilon}\varphi - \dfrac{1}{8m^2c^2}\left(\hat{\pi}^2\hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}\hat{\pi}^2\right)\varphi$.

Rechte Seite: $\dfrac{1}{2mc}\left\{\hat{\pi}^2 - \dfrac{\hat{\pi}^4}{8m^2c^2} - \dfrac{\hat{\pi}\hat{\varepsilon}\hat{\pi}}{2mc} - \dfrac{\hat{\pi}^4}{8m^2c^2}\right\}\varphi$

Setze alle Terme außer $\hat{\varepsilon}\varphi$ auf der rechten Seite:
$$\hat{\varepsilon}\varphi = \left\{\frac{\hat{\pi}^2}{2mc} - \frac{\hat{\pi}^4}{8m^3c^3} + \frac{\hat{\pi}^2\hat{\varepsilon} - 2\hat{\pi}\hat{\varepsilon}\hat{\pi} + \hat{\varepsilon}\hat{\pi}^2}{8m^2c^2}\right\}\varphi$$

die führende Ordnung wie auf Seite 103

$\hat{\pi}(\hat{\pi}\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}\hat{\pi}) - (\hat{\pi}\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}\hat{\pi})\hat{\pi}$
$= [\hat{\pi}, [\hat{\pi}, \hat{\varepsilon}]]$.

relativistische Korrektur:
$$\frac{E}{c} = \sqrt{m^2c^2 + p^2}$$
$$= mc\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^4c^4} + \dots\right)$$

---

* Wie auf Seite 103: $\hat{\pi} \sim \mathcal{O}(1)$, $\hat{\varepsilon} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{mc}\right)$.

Explizit: $[\hat{\pi}, \hat{\varepsilon}] = [-i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{D}\,,\; i\hbar D_0 - mc] = \hbar^2 \sum_k \sigma_k \left[\partial_k - \frac{iq}{\hbar c}A^k,\; \partial_0 + \frac{iq}{\hbar c}A_0\right]$

$$= \hbar^2 \sum_k \sigma_k \frac{iq}{\hbar c}\left(\partial_k A_0 + \partial_0 A^k\right) = -\frac{iq\hbar}{c}\sum_k \sigma_k \underbrace{\left(-\partial_k A_0 - \frac{1}{c}\partial_t A^k\right)}_{E_k\ !}$$

$$= -\frac{iq\hbar}{c}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{E}$$

$$[\hat{\pi},[\hat{\pi},\hat{\varepsilon}]] = -\frac{\hbar^2 q}{c}\sum_{k,l}\underbrace{\left[\sigma_k\left(\partial_k - \frac{iq}{\hbar c}A^k\right),\; \sigma_l E_l\right]}$$

benutze: $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}] = \hat{C}\,[\hat{A}\hat{B}, \hat{D}] + [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}]\,\hat{D}$

$$= \hat{C}\hat{A}[\hat{B},\hat{D}] + \hat{C}[\hat{A},\hat{D}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B},\hat{C}]\hat{D} + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B}\hat{D}$$

$$\leadsto \sigma_l\sigma_k(\partial_k E_l) + 0 + 0 + [\sigma_k,\sigma_l]\,D_k E_l$$

$$= (\delta_{lk}\mathbb{1} + i\varepsilon_{lkm}\sigma_m)(\partial_k E_l) + 2i\,\varepsilon_{klm}\sigma_m D_k E_l$$

$$= -\frac{\hbar^2 q}{c}\left\{\nabla\cdot\vec{E} + i\vec{\sigma}\cdot\nabla\times\vec{E} + 2i\,\vec{\sigma}\cdot\vec{D}\times\vec{E}\right\}$$

$$\hat{\pi}^2 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Seite 103}}}{=} -\hbar^2\,\vec{\sigma}\cdot\vec{D}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{D} = -\hbar^2\left\{\vec{D}^2 + \frac{q}{\hbar c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right\}$$

Wenn wir insbesondere das <u>Coulomb-Problem</u> betrachten, d.h. $\vec{A} = \vec{0}$, $A_0 = \frac{Ze}{r}$,

dann ist
$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla A_0 = -\partial_r A_0 \cdot \vec{e}_r \\ \nabla\cdot\vec{E} = -\nabla^2 A_0 \\ \nabla\times\vec{E} = \vec{0} \\ \vec{B} = \vec{0} \\ \vec{D} = \vec{\nabla} \end{cases},$$

und wir erhalten die Gleichung

$$(i\hbar\partial_t - mc^2)\varphi = \left\{-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + qA_0 - \frac{\hbar^4\nabla^4}{8m^3c^2} + \frac{\hbar^2 q}{8m^2c^2}\underbrace{\nabla^2 A_0}_{Ze\,(-4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}))} + \frac{\hbar^2 q}{4m^2c^2}\underbrace{i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\times\left(\partial_r A_0\frac{\vec{r}}{r}\right)}_{-\vec{\sigma}\cdot\left(\frac{\partial_r A_0}{r}\right)\vec{r}\times\vec{\nabla}}\right\}\varphi.$$

„relativistische kinetische Energie" „Darwin-Term" „Spin-Bahn-Kopplung"

Insgesamt: „Feinstruktur" des Spektrums.

(vgl. Schwabl 9.2; Münster 17.1,3)

(Allerdings kann die Dirac-Gleichung mit Coulomb-Potential auch <u>exakt</u> gelöst werden; vgl. z.B. Schwabl 8.2.)

— · —

Appendix: Foldy - Wouthuysen - Transformation (1950)

Eine „moderne" Methode für die Betrachtung des nichtrelativistischen Limes wird durch die genannte Feldtransformation angeboten. Dabei kann insbesondere der Umgang mit dem inversen Operator $[2mc+\hat{\mathcal{E}}]^{-1}$ vermieden werden (der Operator $2mc+\hat{\mathcal{E}}$ könnte ja* Null-Eigenwerte besitzen und deshalb gar nicht invertierbar sein!)

Direkt auf dem Niveau der Wirkung, zur Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{mc})$: (Skizze)

$$S = \int_x \bar{\Psi}(i\hbar \not{D} - mc)\Psi \quad ; \quad \Psi =: e^{\frac{i\hbar\gamma^j D_j}{2mc}}\Psi' \quad ; \quad \Psi^+ = \Psi'^+ e^{-\frac{i\hbar(\gamma^k)^+ \overleftarrow{D}_k}{2mc}}$$

$$= \int_x \Psi'^+ e^{-\frac{i\hbar(\gamma^k)^+\overleftarrow{D}_k}{2mc}} \gamma^0 \left(i\hbar\gamma^0 D_0 + i\hbar\gamma^m D_m - mc\right) e^{\frac{i\hbar\gamma^j D_j}{2mc}} \Psi' \quad ; \quad (\gamma^k)^+\gamma^0 = \gamma^0\gamma^k \quad \int_x f\overleftarrow{D} g = -\int_x f\overrightarrow{D} g$$

$$= \int_x \bar{\Psi}' e^{\frac{i\hbar\gamma^k D_k}{2mc}} \left(i\hbar\gamma^0 D_0 + i\hbar\gamma^m D_m - mc\right) e^{\frac{i\hbar\gamma^j D_j}{2mc}} \Psi' \quad ; \quad \hbar\gamma^k D_k =: \hat{\Delta}$$

$$= \int_x \bar{\Psi}' \underbrace{\left(1 + \frac{i\hat{\Delta}}{2mc} - \frac{\hat{\Delta}^2}{8m^2c^2}\right)\left(i\hbar\gamma^0 D_0 + i\hat{\Delta} - mc\right)\left(\underset{(a)}{1} + \underset{(b)}{\frac{i\hat{\Delta}}{2mc}} - \underset{(c)}{\frac{\hat{\Delta}^2}{8m^2c^2}}\right)} \Psi' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2c^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
(a) &\rightarrow \quad i\hbar\gamma^0 D_0 + \cancel{i\hat{\Delta}} - mc - \frac{\hat{\Delta}\hbar\gamma^0 D_0}{2mc} - \frac{\hat{\Delta}^2}{2mc} - \cancel{\frac{i\hat{\Delta}}{2}} + \frac{\hat{\Delta}^2}{8mc} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2c^2}\right) \\
(b) &\rightarrow \quad - \frac{\hbar\gamma^0 D_0 \hat{\Delta}}{2mc} - \frac{\hat{\Delta}^2}{2mc} - \cancel{\frac{i\hat{\Delta}}{2}} + \frac{\hat{\Delta}^2}{4mc} \\
(c) &\rightarrow \quad + \frac{\hat{\Delta}^2}{8mc}
\end{aligned}$$

$$= i\hbar\gamma^0 D_0 - mc - \frac{\hbar^2}{2mc}\left(\gamma^k D_k \gamma^0 D_0 + \gamma^0 D_0 \gamma^k D_k\right) - \frac{\hbar^2}{2mc}\gamma^k D_k \gamma^l D_l + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2c^2}\right).$$

Hier (Standard-Darstellung):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \; ; \; \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\gamma^0\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} ; \; \gamma^k\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} ; \; \gamma^k\gamma^l = -\begin{pmatrix} \sigma_k\sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_k\sigma_l \end{pmatrix} ;$$

$$\gamma^k D_k \gamma^0 D_0 + \gamma^0 D_0 \gamma^k D_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}[D_0, D_k] = -\frac{iq}{\hbar c}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{E} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{E} & 0 \end{pmatrix}$$

Seite 105

$$\gamma^k D_k \gamma^l D_l = -\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{D}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{D} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{D}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{D} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \vec{D}^2 + \frac{q}{\hbar c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} & 0 \\ 0 & \vec{D}^2 + \frac{q}{\hbar c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \end{pmatrix}$$

Schreibe auch: $\Psi' = \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix}$; $\Psi'^+ = (\theta^+, \chi^+)$.

$$\Rightarrow S = \int_x \Big\{ \theta^+\left[i\hbar D_0 - mc + \frac{\hbar^2}{2mc}\left(\vec{D}^2 + \frac{q}{\hbar c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)\right]\theta \quad \longleftarrow \text{„Teilchen"}$$

$$+ \chi^+\left[i\hbar D_0 + mc - \frac{\hbar^2}{2mc}\left(\vec{D}^2 + \frac{q}{\hbar c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)\right]\chi \quad \longleftarrow \text{„Antiteilchen"}$$

$$+ \frac{iq\hbar}{2mc^2}\left[\theta^+\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\chi - \chi^+\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\theta\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2c^2}\right) \Big\}.$$

„Kopplung" (→ Zitterbewegung)

(Angeblich gibt es eine ähnliche Transformation für das Klein-Gordon-Feld, so dass die Analyse von Seite 98 verbessert werden könnte; vgl. Schwabl, Aufgabe 9.2.)

---

* Tut es auch. Die Inversion kann trotzdem ~ gerechtfertigt werden, u.a. wenn bzgl. t Fourier-transformiert wird und dementsprechend $\hat{\mathcal{E}} \to \mathcal{E} \neq -2mc$ als feste Variable auftaucht. Zitterbewegung kann nicht behandelt werden.