7.2 Dirac-Gleichung [Schwabl 5.3]

(P.A.M. Dirac 1928)

Es gibt viele Vorgehensweisen (alle interessant!), die Dirac-Gleichung einzuführen, z.B.:

(i) „geschichtlich", d.h. welche Probleme der nichtrelativistischen Quantenmechanik man damit lösen wollte;

(ii) „modern", d.h. aus einer systematischen Untersuchung zur Darstellungen der Lorentz-Gruppe und Konstruktion Lorentz-invarianter Wirkungen.

Hier: minimal und eher geschichtlich. [Mehr dazu: Elementarteilchenphysik.]
[Methode (ii): Symmetrien in der Physik; Quantenfeldtheorie; Schwabl Kap. 6.]

Die Idee: Will $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$ wieder durch $E \leftrightarrow i\hbar\partial_t$, $\vec{p} \leftrightarrow -i\hbar\nabla$ als Differenzialgleichung darstellen aber jetzt so dass $i\hbar\partial_t$ linear auftaucht, wie in der Schrödinger-Gleichung. Wegen Lorentz-Kovarianz sollte Abhängigkeit von $\vec{p}$ dann auch linear sein.

Ansatz: Sei $p := \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \hbar K$ (vgl. Seite 96). Versuche die relativistische Energie-Impuls-Beziehung zu „faktorisieren":

$$0 \overset{!}{=} \underbrace{p^\mu p_\mu}_{\eta^{\mu\nu}p_\mu p_\nu} - m^2c^2 \overset{?}{=} \left(\beta^\kappa p_\kappa - mc\right)\left(\gamma^\lambda p_\lambda + mc\right)$$

$$= \beta^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda + mc\left(\beta^\kappa - \gamma^\kappa\right)p_\kappa - m^2c^2$$

muss verschwinden
$\Rightarrow \beta^\kappa = \gamma^\kappa \quad \forall\, \kappa \in \{0,1,2,3\}$.

symmetrisiere:
$$\frac{1}{2}\beta^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda + \frac{1}{2}\beta^{\overset{\lambda}{\cancel{\kappa}}}\gamma^{\overset{\kappa}{\cancel{\lambda}}} p_{\underset{\lambda}{\cancel{\kappa}}} p_{\underset{\kappa}{\cancel{\lambda}}} = \frac{1}{2}\left(\beta^\kappa\gamma^\lambda + \beta^\lambda\gamma^\kappa\right)p_\kappa p_\lambda$$

Die Faktorisierung kann also nur unter der Bedingung

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\,\mathbb{1}}$$ „Clifford-Algebra"

stattfinden. Falls nichttriviale Lösungen gefunden werden können, folgt aus $\gamma^\mu p_\mu \mp mc = 0$ unter

$$p^\mu \leftrightarrow \left(i\hbar\frac{1}{c}\partial_t, -i\hbar\nabla\right) \;;\quad p_\mu \leftrightarrow \left(i\hbar\partial_0, i\hbar\nabla\right) = \left(i\hbar\partial_\mu\right)$$

sowie Wahl von „$-mc$" (von keiner Konsequenz: vgl. Seite 102) die Dirac-Gleichung:

$$\boxed{\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\Psi = 0;}$$ Ψ = vierkomponentiger Spaltenvektor.

Darstellungen der Clifford-Algebra:

Wie Dirac bemerkt hat, kann die Clifford-Algebra mit Matrizen erfüllt werden.

Dimension:

$\mu = \nu = 0 \Rightarrow \gamma^0\gamma^0 = \mathbb{1} \Rightarrow \exists (\gamma_0)^{-1}$ & $\det(\gamma_0) \neq 0$.

$\mu = \nu \in \{1,2,3\} \Rightarrow \gamma^i\gamma^i = -\mathbb{1} \Rightarrow \exists (\gamma_i)^{-1}$ & $\det(\gamma_i) \neq 0$.

bezeichne mit lateinischen Indizen

$\mu \neq \nu \Rightarrow \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu \Rightarrow \det(\gamma^\mu)\det(\gamma^\nu) = \det(-\mathbb{1})\det(\gamma^\nu)\det(\gamma^\mu)$

$\Rightarrow \det(-\mathbb{1}) = (-1)^D = 1 \Rightarrow \boxed{D = 0, 2, 4, \ldots}$.

D: Dimension der Matrix.

Spur:

$\mu \neq \nu \Rightarrow \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu \Rightarrow \gamma^\nu = -(\gamma^\mu)^{-1}\gamma^\nu\gamma^\mu$

$\Rightarrow Sp\{\gamma^\nu\} = -Sp\{\underbrace{(\gamma^\mu)^{-1}\gamma^\nu\gamma^\mu}\} = -Sp\{\gamma^\nu\}$

$\Rightarrow \boxed{Sp\{\gamma^\nu\} = 0} \quad \forall \nu$.

Hermitizität:

Seite 101 $\Rightarrow (\gamma^0)^+ = \gamma^0$, $(\gamma^0\gamma^i)^+ = \gamma^0\gamma^i$

$\Rightarrow (\gamma^i)^+\gamma^0 = \gamma^0\gamma^i \Rightarrow (\gamma^i)^+ = \gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^i$

D.h. γ^0 ist hermitesch; die γ^i sind antihermitesch.

Beispiele:

$D=0$: komplexe Zahlen; aber Spur $= 0 \Rightarrow$ keine!

$D=2$: alle spurlose 2×2-Matrizen können als Linearkombinationen der Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden. Es gibt $3 = 1+2$ davon $\Rightarrow$ könnte in zwei räumlichen Dimensionen funktionieren, vgl. Aufgabe 14.1.

$D=4$:

* „Standard-Darstellung":

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2\times2} \end{pmatrix}; \quad \gamma^k := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

* „Weyl-Darstellung":

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2\times2} \\ \mathbb{1}_{2\times2} & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^k := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

* $\{\gamma^\mu\}$ ist Darstellung $\Rightarrow \{S\gamma^\mu S^{-1}\}$ ist Darstellung. (vgl. Aufgabe 14.2)

Grundeigenschaften der (freien) Dirac-Gleichung:

Wenn wir die Dirac-Gleichung in die gewöhnliche (nicht-kovariante) Form der Schrödinger-Gleichung umschreiben, können wir den Einteilchen-Hamilton-Operator identifizieren:

$$i\hbar\gamma^0\partial_0\Psi = -i\hbar\gamma^j\partial_j\Psi + mc\Psi \qquad \Big|\ \partial_0 = \tfrac{1}{c}\partial_t\ ; \text{ multipliziere vom links mit } \gamma^0\cdot c$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\,\partial_t\Psi = \underbrace{\left[-i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\nabla + mc^2\beta\right]}_{\hat{H}_0}\Psi \qquad \text{wobei} \quad \alpha_j := \gamma^0\gamma^j \ ;\ \beta := \gamma^0$$

Also im Allgemeinen: $\hat{H}_0 = c\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + mc^2\beta$.

Aus der Hermitizität von $\hat{H}_0$ folgt $(\alpha_i)^+ = \alpha_i$, $\beta^+ = \beta$ $\Rightarrow$ Seite 100.

Fock-Raum-Hamilton-Operator (vgl. Seite 73):

$$\hat{H} = \int_V d^3\vec{x}\ \hat{\psi}^+(\vec{x})\left[-i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\nabla + mc^2\beta\right]\hat{\psi}(\vec{x})$$

$$= \int_V d^3\vec{x}\ \hat{\bar{\Psi}}(\vec{x})\left[-i\hbar c\,\gamma^j\partial_j + mc^2\right]\hat{\Psi}(\vec{x}) \ ; \qquad \hat{\bar{\Psi}} := \hat{\Psi}^+\gamma^0 .$$

Lagrange-Dichte (vgl. Seite 74):

$$\mathcal{L} = \Psi^+\left[i\hbar\partial_t + i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\nabla - mc^2\beta\right]\Psi$$

$$= \bar{\Psi}\,c\left[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right]\Psi .$$

Freie Lösung:

Elementarteilchenphysik bzw. Vergleich mit Klein-Gordon, Seite 96:

$$\Psi(\vec{x},t) = \int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2K^0}}\sum_{s=\pm1}\left\{a_{\vec{k},s}\,u_{\vec{k},s}\,e^{-iK\cdot x} + b^*_{\vec{k},s}\,v_{\vec{k},s}\,e^{iK\cdot x}\right\}$$

vierkomponentige „Spinoren"; entsprechen Polarisationsvektoren, mit Orthogonalität, Vollständigkeit, usw; hier allerdings nicht dimensionslos.

Kontinuitätsgleichung:

$$i\hbar\,\partial_t\Psi = -i\hbar c\sum_j \alpha_j\partial_j\Psi + mc^2\beta\Psi \qquad \big|\ (\ )^+$$

$$-i\hbar\,\partial_t\Psi^+ = i\hbar c\sum_j \partial_j\Psi^+\alpha_j + mc^2\Psi^+\beta$$

Multipliziere die erste vom links mit Ψ^+, die zweite vom rechts mit Ψ, und subtrahiere

$$\Leftrightarrow \quad i\hbar\left[\Psi^+\partial_t\Psi + (\partial_t\Psi^+)\Psi\right] = -i\hbar c\sum_j\left[\Psi^+\alpha_j\partial_j\Psi + (\partial_j\Psi^+)\alpha_j\Psi\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \partial_t\underbrace{(\Psi^+\Psi)}_{\varrho} + \sum_j\partial_j\underbrace{(\Psi^+ c\,\alpha_j\Psi)}_{j_i} = 0 .$$

Kovariante Schreibweise: $\boxed{j^\mu = (c\varrho, \vec{j}) = c\,\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi .}$

Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern:

Wie auf Seite 97: $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu$.

Die Dirac-Gleichung kann folglich als

$$(i\hbar \not{D} - mc)\Psi = 0$$

ausgedrückt werden, wobei „Feynman-slash" als $\not{D} := \gamma^\mu D_\mu$ eingeführt wurde.

Kontinuitätsgleichung in der Präsenz von elektromagnetischen Feldern:

Wie auf Seite 101:

$$i\hbar \partial_t \Psi - \frac{q}{c} A_0 \Psi = -i\hbar c \sum_j \alpha_j \partial_j \Psi + q \sum_j \alpha_j A_j \Psi + mc^2 \beta \Psi \quad | \, (\,)^\dagger$$

$$-i\hbar \partial_t \Psi^\dagger - \frac{q}{c} \Psi^\dagger A_0 = i\hbar c \sum_j \partial_j \Psi^\dagger \alpha_j + q \sum_j \Psi^\dagger \alpha_j A_j + mc^2 \Psi^\dagger \beta$$

Diese Terme fallen in der Differenz weg!

$\Rightarrow$ $J^\mu = c\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ bleibt unverändert. Das ist auch gut so, weil J^μ ohne weiteres eichinvariant ist.

Lagrange-Dichte in der Präsenz von elektromagnetischen Feldern:

Seite 101 mit kovarianter Ableitung:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} c \, (i\hbar \not{D} - mc)\Psi.$$

Man bemerke wieder: $\mathcal{L} = c\bar{\Psi}\{i\hbar\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu) - mc\}\Psi$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi,$$

d.h. A_μ koppelt an erhaltenen Strom, d.h. es geht um einen geladenen Strom.

Zur Seite 99: Warum darf man „$-mc$" wählen?

Definiere: $\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Es folgt: $\gamma^5\gamma^1 = \underbrace{i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1}_{-1\ +1\ -1\ -1} = -\gamma^1\gamma^5$; $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$.

$$(i\hbar\not{D} - mc)\Psi = 0 \qquad | \text{ multipliziere mit } \gamma^5$$

$$\Rightarrow \; -(i\hbar\not{D} + mc)\gamma^5\Psi = 0$$

D.h. wenn Ψ eine Lösung mit „$-mc$" ist, dann ist $\gamma^5\Psi$ eine Lösung mit „$+mc$".