7. Relativistische Teilchen

Wir kehren jetzt (aus eher historischen Gründen) zum Einteilchen-Hilbertraum zurück, und betrachten relativistische Wellengleichungen. Eigentlich ist diese Problemstellung eng genommen nicht physikalisch sinnvoll, weil bei hohen Energien Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt werden können, und deshalb doch Fock-Raum gebraucht wird. Glücklicherweise erfüllt aber ein Fock-Raum-Feldoperator $\hat{\phi}_I(\vec{x},t)$ dieselbe Wellengleichung (d.h. erweist dieselbe Zeitentwicklung) als eine Einteilchen-Wellenfunktion (vgl. Kapitel 6.2), so dass die Analyse letztendlich wieder relevant ist.

7.1 Klein-Gordon-Gleichung [Schwabl 5.1-2]

(E. Schrödinger 1926; W. Gordon 1926; O. Klein 1927)

Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung in der Ortsdarstellung:

$$i\hbar\partial_t \psi(\vec{x},t) = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\vec{x})\right]\psi(\vec{x},t) \quad ; \quad \psi \in \mathbb{C}.$$

Durch „Korrespondenzprinzip" $E \leftrightarrow i\hbar\partial_t$, $\vec{p} \leftrightarrow -i\hbar\nabla$ entspricht diese der Beziehung $E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V$.

Betrachte jetzt die relativistische Beziehung $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$.
Wenn auch $x^0 := ct$ eingeführt wird, so dass $E \leftrightarrow i\hbar c\partial_0$ gilt, erhalten wir

$$-\hbar^2\partial_0^2\phi(\vec{x},t) = \left[-\hbar^2\nabla^2 + m^2c^2\right]\phi(\vec{x},t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(\partial_0^2 - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(\vec{x},t) = 0}$$

Bemerkungen:

* Kovariante Schreibweise: $\partial_0^2 - \nabla^2 = \partial_\mu\partial^\mu$.

* Differenzialoperator ist reell $\Rightarrow$ sowohl $\phi \in \mathbb{R}$ als auch $\phi \in \mathbb{C}$ wären denkbar.

* Die entsprechenden Lagrange-Dichten:

$$\mathcal{L}_{\text{Schrödinger}} = \psi^*\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - V(\vec{x})\right)\psi \qquad \text{(vgl. Seite 74)}$$

$$\mathcal{L}_{\phi\in\mathbb{R}} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^2\right) \qquad \text{(vgl. Seite 83 bzw. 86)}$$

$$\mathcal{L}_{\phi\in\mathbb{C}} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^*\phi .$$

Die relativistischen Lagrange-Dichten sollten Lorentz-invariant sein, so dass auch die Wirkung

$$S = \int dt \int d^3\vec{x}\, \mathcal{L} = \frac{1}{c}\int d^4x\, \mathcal{L}$$

invariant ist; $d^4x' = \underbrace{|\det\Lambda|}_{1!}\, d^4x = d^4x$.

<u>Lösung</u>: Die Klein-Gordon-Gleichung kann wie auf Seite 70 bzw. 87, d.h. durch eine Fourier-Darstellung, gelöst werden.

„Kovariante" Schreibweise:
$$K := \left(\frac{\omega_{\vec k}}{c}, \vec k\right);$$
$$K^0 := \frac{\omega_{\vec k}}{c} := \sqrt{\vec k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}};$$

(Dimensionen: $[\omega] = \frac{1}{s}$; $[\frac{\omega}{c}] = \frac{1}{m}$; $[k] = \frac{1}{m}$; $[\frac{mc}{\hbar}] = \frac{kg\,\frac{m}{s}}{J\,s} = \frac{kg\,\frac{m}{s}}{kg\,\frac{m^2}{s^2}\,s} = \frac{1}{m}$.)

$$K\cdot x = K^\mu x_\mu = K^0 x^0 - \vec k\cdot\vec x = \omega_{\vec k} t - \vec k\cdot\vec x.$$

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec x, t) = \sqrt{\hbar c}\int\frac{d^3\vec k}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2K^0}}\left\{a_{\vec k}\, e^{-iK\cdot x} + b^*_{\vec k}\, e^{iK\cdot x}\right\},$$

wobei $b_{\vec k} := a_{\vec k}$ falls $\phi\in\mathbb{R}$.

(Check: $\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)e^{\pm iK\cdot x} = \left(-K_\mu K^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)e^{\pm iK\cdot x} = \left(-(K^0)^2 + \vec k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)e^{\pm iK\cdot x} = 0.$)

<u>Kontinuitätsgleichung</u>: Wie schon bei der Schrödinger-Gleichung kann eine physikalische Interpretation einer Gleichung durch die Bestimmung von Erhaltungsgrößen erleichtert werden. Sei vorerst $\phi\in\mathbb{C}$. Multipliziere Klein-Gordon-Gleichung von links mit ϕ^*:

$$\phi^*\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0. \qquad \Big|\ \text{Komplexkonjugiere}$$
$$\Rightarrow \quad \phi\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi^* = 0 \qquad \Big|\ \text{subtrahiere voneinander}$$
$$\Rightarrow \quad \phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi - \phi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* = 0$$
$$\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad \partial_\mu\left\{\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*\right\} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{c^2}\partial_t\left\{\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*\right\} - \sum_{k=1}^{3}\partial_k\left\{\phi^*\partial_k\phi - \phi\partial_k\phi^*\right\} = 0$$

Seite 18 u.a.: Fluß bzw. Wahrscheinlichkeitsstrom $= \vec j = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\{\phi^*\nabla\phi\}$
$$= \frac{\hbar}{2mi}\left\{\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right\}.$$

Wenn wir also mit $-\frac{\hbar}{2mi}$ multiplizieren,* erhalten wir
$$\partial_t\rho + \nabla\cdot\vec j = 0,$$
wobei
$$\boxed{\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left\{\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*\right\}}.$$

Bemerkungen:
* $\phi\in\mathbb{R} \Rightarrow \rho = \vec j = 0$
* $\phi\in\mathbb{C} \Rightarrow \rho\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Aufgabe 13.3.

---

* Im nachhinein ist diese Normierung (von Schwabl) nicht die bestmögliche, vgl. S. 98.

Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern:

Im Falle eines komplexen Klein-Gordon-Feldes (bzw. „Skalarfeldes") wird die Form der Wechselwirkung durch Eichinvarianz bestimmt.

Wie auf Seite 31:
($\Psi_{S.31} \sim \phi_{hier}$; $\phi_{S.31} \sim A^0_{hier}$)

$$\begin{cases} \phi \to \phi' = e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}\,\phi \\ A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi \end{cases}$$

Kovariante Ableitung: $D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu$, mit $D'_\mu \phi' = e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi} D_\mu \phi$.

$\Downarrow$

Kovariante Klein-Gordon-Gleichung: $\left(D_\mu D^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0.$

Kontinuitätsgleichung in der Präsenz von elektromagnetischen Feldern:

Wie auf Seite 96: $\left\{ \underbrace{\left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu\right)\left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c} A^\mu\right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}} \right\} \phi = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \phi^* \left\{ \partial_\mu \partial^\mu + \frac{2iq}{\hbar c} A_\mu \partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c}(\partial_\mu A^\mu) - \frac{q^2}{\hbar^2 c^2} A_\mu A^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right\} \phi = 0 \qquad |\,(\,)^*$$

$$\phi \left\{ \partial_\mu \partial^\mu - \frac{2iq}{\hbar c} A_\mu \partial^\mu - \frac{iq}{\hbar c}(\partial_\mu A^\mu) - \frac{q^2}{\hbar^2 c^2} A_\mu A^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right\} \phi^* = 0$$

Subtrahiere $\Rightarrow \quad \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi - \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + \frac{2iq}{\hbar c} A_\mu \left\{ \phi^* \partial^\mu \phi + \phi \partial^\mu \phi^* \right\} + \frac{2iq}{\hbar c} (\partial_\mu A^\mu) \phi^* \phi = 0$

$$\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad \partial_\mu \left\{ \phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* \right\} + \frac{2iq}{\hbar c} \partial_\mu \left\{ A^\mu \phi^* \phi \right\} = 0$$

$$\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad \partial_\mu \underbrace{\left\{ \phi^* \left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c} A^\mu\right) \phi - \phi \left(\partial^\mu - \frac{iq}{\hbar c} A^\mu\right) \phi^* \right\}}_{\phi^* D^\mu \phi - (\phi^* D^\mu \phi)^* = 2i\, \mathrm{Im}\{\phi^* D^\mu \phi\}} = 0$$

Insgesamt: $\boxed{J^\mu = (c\varrho, \vec{j}) = -\frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}\left\{ \phi^* D^\mu \phi \right\}}$. (Normierung wie auf Seite 96, d.h. ungünstig.)

Dieser Viererstrom ist eichinvariant; vgl. Aufgabe 5.1!

Lagrange-Dichte in der Präsenz von elektromagnetischen Feldern:

Seite 95 $\Rightarrow$ $\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi$

$$= \left(\partial_\mu - \frac{iq}{\hbar c} A_\mu\right) \phi^* \left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c} A^\mu\right) \phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi$$

$$= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \phi^* \phi - \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \left\{ \phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* \right\} + \frac{q^2}{\hbar^2 c^2} A_\mu A^\mu \phi^* \phi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -\frac{iq}{\hbar c} \left\{ \phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* \right\} + \frac{2q^2}{\hbar^2 c^2} A^\mu \phi^* \phi = -\frac{iq}{\hbar c} \cdot 2i\, \mathrm{Im}\left\{ \phi^* D^\mu \phi \right\}$$

$\Rightarrow$ das Viererpotential „koppelt" an Viererstrom (vgl. Seite 86).

Nichtrelativistischer Limes:

$$\frac{\omega_{\vec{k}}}{c} = K^0 = \sqrt{\frac{m^2c^2}{\hbar^2}+k^2} = \frac{mc}{\hbar}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\hbar^2k^2}{m^2c^2}+\dots\right) = \frac{1}{\hbar c}\left(mc^2+\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\dots\right)$$

Allgemeine Lösung (Seite 96): $\phi(\vec{x},t) = \sqrt{\hbar c}\int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2k^0}}\left\{a_{\vec{k}}\,e^{-iK\cdot x}+b^*_{\vec{k}}\,e^{iK\cdot x}\right\}$.

⇒ Nehme Ansatz $\phi(\vec{x},t) = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\phi_-(\vec{x},t) + e^{+i\frac{mc^2}{\hbar}t}\phi_+(\vec{x},t)$;

$$\partial_t\phi = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\left\{-i\frac{mc^2}{\hbar}\phi_- + \partial_t\phi_-\right\} + e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\left\{i\frac{mc^2}{\hbar}\phi_+ + \partial_t\phi_+\right\};$$

$$\partial_t^2\phi = e^{-i\frac{mc^2t}{\hbar}}\left\{-\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\phi_- - 2i\frac{mc^2}{\hbar}\partial_t\phi_- + \partial_t^2\phi_-\right\} + e^{i\frac{mc^2t}{\hbar}}\left\{-\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\phi_+ + 2i\frac{mc^2}{\hbar}\partial_t\phi_+ + \partial_t^2\phi_+\right\}.$$

Setze in $\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0$ ein, und multipliziere durch $\frac{\hbar^2}{2m}e^{i\frac{mc^2t}{\hbar}}$.

$$\Rightarrow\quad -i\hbar\partial_t\phi_- - \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\phi_- + \frac{\hbar^2}{2mc^2}\partial_t^2\phi_- + e^{i\frac{2mc^2t}{\hbar}}\left\{i\hbar\partial_t\phi_+ - \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\phi_+ + \frac{\hbar^2}{2mc^2}\partial_t^2\phi_+\right\} = 0.$$

relativistische Korrektur

schnelle Schwingungen; „Zitterbewegung" (Schwabl 10.1)
Mittelwert über $\Delta t \gtrsim \frac{\hbar}{2mc^2}$ verschwindet.

In guter Näherung gilt also $i\hbar\partial_t\phi_- = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\phi_-$, d.h. die Schrödinger-Gleichung.

Bemerkungen:

(i) Die „größten" Terme: $\partial_t\phi = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}\right)\phi_-$; $\partial_t\phi^* = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\left(i\frac{mc^2}{\hbar}\right)\phi_-^*$.

$$\Rightarrow\quad \rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left\{\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*\right\} \approx \frac{i\hbar}{2mc^2}\left\{-i\frac{mc^2}{\hbar}\phi_-^*\phi_- - i\frac{mc^2}{\hbar}\phi_-\phi_-^*\right\} = |\phi_-|^2,$$

d.h. genau wie in der nichtrelativistischen Theorie (vgl. Aufgabe 5.1 u.a.).

(ii) Was passiert bei der Wirkung?

Seite 95 ⇒
$$S = \int dt\int_V d^3\vec{x}\left\{\frac{1}{c^2}\partial_t\phi^*\partial_t\phi - \sum_j\partial_j\phi^*\partial_j\phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^*\phi\right\}$$
$$\overset{\text{partielle Integration}}{=} \int dt\int_V d^3\vec{x}\;\phi^*\left\{-\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \nabla^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right\}\phi$$
$$= \int dt\int_V d^3\vec{x}\left\{e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\phi_-^* + e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\phi_+^*\right\}$$
$$\times\left\{e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\left[2i\frac{m}{\hbar}\partial_t\phi_- - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi_- + \nabla^2\phi_-\right] + e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\left[-2i\frac{m}{\hbar}\partial_t\phi_+ - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi_+ + \nabla^2\phi_+\right]\right\}$$
$$= \int dt\int_V d^3\vec{x}\,\frac{2m}{\hbar^2}\left\{\phi_-^*\left[i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2\partial_t^2}{2mc^2}\right]\phi_- + \phi_+^*\left[-i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2\partial_t^2}{2mc^2}\right]\phi_+\right.$$
$$\left. + e^{-\frac{2imc^2t}{\hbar}}\phi_+^*\left[i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2\partial_t^2}{2mc^2}\right]\phi_- + e^{\frac{2imc^2t}{\hbar}}\phi_-^*\left[-i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2\partial_t^2}{2mc^2}\right]\phi_+\right\}.$$

Die Terme mit schnellen Schwingungen verschwinden in guter Näherung(?); wenn auch $\frac{1}{2mc^2}$ als kleine Korrektur betrachtet wird, hat die Wirkung von ϕ_- dieselbe Form wie auf Seite 74. Es gibt einen Unterschied in Normierung* von $\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \approx \sqrt{\frac{2\omega_{\vec{k}}}{\hbar c^2}}$, vgl. Seite 74. Das Feld ϕ_+ ist wie ϕ_- aber „Zeitentwicklung läuft rückwärts" (Feynman-Stückelberg-Interpretation).

*Dieser Unterschied wurde in der Normierung von Seite 96 nicht berücksichtigt!