6.2 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes [Schwabl 14.4]

Nochmal: (Kap. 5.2 bzw. Seite 83)

$$L = \int_V d^3\vec{x}\ \frac{1}{2}\left\{ (\partial_t\phi)^2 - c^2|\nabla\phi|^2 - \omega_0^2\phi^2 \right\}$$

$\Rightarrow$ klassisch: $\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_{\vec{k}}}} \left\{ a_{\vec{k}}\, e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^*_{\vec{k}}\, e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}$

$\Rightarrow$ quantisiert: $E_{\vec{k}} = \hbar\omega_{\vec{k}}\,(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2})$; $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{c^2\vec{k}^2 + \omega_0^2}$; $n_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \dots$

Jetzt: (Seiten 85-86)

$$L_{em} = \frac{1}{4\pi c^2}\int_V d^3\vec{x}\ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left\{ (\partial_t A_j)^2 - c^2|\nabla A_j|^2 \right\}_{\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0},$$

$$H_{em} = \frac{1}{4\pi c^2}\int_V d^3\vec{x}\ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left\{ (\partial_t A_j)^2 + c^2|\nabla A_j|^2 \right\}_{\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0}.$$

Aus einem Vergleich von L und L_{em} ist klar, dass es sich um ein System von Teilchen mit $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ handelt, aber wie konstruiert man die entsprechenden Fock-Raum-Operatoren, z.B. $\hat{H}_{em}$, explizit? (Seite 72: $\hat{H}_0 = \sum_j E_j \hat{a}^+_j \hat{a}_j$.)

<u>Arbeitsplan:</u>

(i) nehme allgemeine klassische Lösung wie durch L_{em} bestimmt; errate günstige Schreibweise.

(ii) Setze diese in H_{em} ein, um H_{em} so umzuschreiben dass die gewünschte Form auftaucht.

(iii) „quantisiere", d.h. ersetze komplexe Koeffizienten durch Operatoren so dass $\hat{H}_{em}$ richtig aussieht.

man muß etwas „tun"; $\hat{\phi} \to \phi$ kann hergeleitet werden, $\phi \to \hat{\phi}$ nicht!

(iv) sei die allgemeine klassische Lösung mit demselben Ersatz als Dirac-Bild-Operator neu interpretiert; checke Vertauschungsrelationen.

((v) um ganz sicher zu sein, nehme gefundene Fock-Raum-$\hat{H}_{em}$; pfadintegralquantisiere; und checke dass die alte L_{em} wieder rauskommt.)

(i) Klassische Lösung:

Wir betrachten direkt den thermodynamischen Limes, $V \to \infty$.

Sei $\int_{\vec{x}} := \int d^3\vec{x}$; $\int_{\vec{k}} := \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_{\vec{k}}}}$.

Ansatz: $$\vec{A}(\vec{x},t) = \sqrt{4\pi c^2\hbar}\int_{\vec{k}}\sum_{\lambda}\left\{ \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda}\, e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\},$$

wobei $\lambda = 1,2$ und die <u>Polarisationsvektoren</u> die normalen Eigenschaften besitzen: $\vec{k}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda} = 0$, $\vec{e}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}$.

(ii) Es folgt:

$$H_{em} = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{\vec{x}} \frac{1}{2} \left\{ \partial_t \vec{A} \cdot \partial_t \vec{A} + c^2 \sum_{j=1}^{3} \partial_j \vec{A} \cdot \partial_j \vec{A} \right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \int\!\!\int_{\vec{k}\,\vec{q}} \sum_{\lambda,\lambda'} \int_{\vec{x}} \Big\{ \left[-i\omega_{\vec{k}}\, \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda}\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + i\omega_{\vec{k}}\, \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$
$$\cdot \left[-i\omega_{\vec{q}}\, \vec{e}_{\vec{q},\lambda'}\, a_{\vec{q},\lambda'}\, e^{-i\omega_{\vec{q}} t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} + i\omega_{\vec{q}}\, \vec{e}^{\,*}_{\vec{q},\lambda'}\, a^*_{\vec{q},\lambda'}\, e^{i\omega_{\vec{q}} t - i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right]$$
$$+ c^2 \sum_{j=1}^{3} \left[ik_j\, \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda}\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} - ik_j\, \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$
$$\cdot \left[iq_j\, \vec{e}_{\vec{q},\lambda'}\, a_{\vec{q},\lambda'}\, e^{-i\omega_{\vec{q}} t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} - iq_j\, \vec{e}^{\,*}_{\vec{q},\lambda'}\, a^*_{\vec{q},\lambda'}\, e^{i\omega_{\vec{q}} t - i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right] \Big\}$$

Vier unterschiedliche $\vec{x}$-Integrale tauchen auf $(\omega_{-\vec{k}} \overset{!}{=} \omega_{\vec{k}})$:

$$\int_{\vec{x}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_{\vec{q}} t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{q})\, e^{-2i\omega_{\vec{k}} t}$$

$$\int_{\vec{x}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_{\vec{q}} t - i\vec{q}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})$$

$$\int_{\vec{x}} e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_{\vec{q}} t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})$$

$$\int_{\vec{x}} e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_{\vec{q}} t - i\vec{q}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{q})\, e^{2i\omega_{\vec{k}} t}$$

Folglich kann auch das $\vec{q}$-Integral durchgeführt werden:

$$H_{em} = \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_{\vec{k}}} \sum_{\lambda,\lambda'} \Big\{ \overbrace{\left[-\omega_{\vec{k}}^2 + c^2 \sum_j k_j k_j \right]}^{0} \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{e}_{-\vec{k},\lambda'}\, a_{\vec{k},\lambda}\, a_{-\vec{k},\lambda'}\, e^{-2i\omega_{\vec{k}} t}$$
$$+ \left[\omega_{\vec{k}}^2 + c^2 \sum_j k_j k_j \right] \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda'}\, a_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{\vec{k},\lambda'}$$
$$+ \left[\omega_{\vec{k}}^2 + c^2 \sum_j k_j k_j \right] \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda'}\, a^*_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda'}$$
$$+ \underbrace{\left[-\omega_{\vec{k}}^2 + c^2 \sum_j k_j k_j \right]}_{0} \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{e}^{\,*}_{-\vec{k},\lambda'}\, a^*_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{-\vec{k},\lambda'}\, e^{2i\omega_{\vec{k}} t} \Big\}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \int d^3\vec{k} \sum_{\lambda,\lambda'} \omega_{\vec{k}} \left\{ \delta_{\lambda\lambda'}\, a_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{\vec{k},\lambda'} + \delta_{\lambda\lambda'}\, a^*_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda'} \right\}$$

$$= \int d^3\vec{k} \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \left\{ \frac{1}{2} a_{\vec{k},\lambda}\, a^*_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} a^*_{\vec{k},\lambda}\, a_{\vec{k},\lambda} \right\}.$$

(iii) Quantisierung:

$$a_{\vec{k},\lambda} \to \hat{a}_{\vec{k},\lambda} \quad ; \quad a^*_{\vec{k},\lambda} \to \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}$$

$$[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{q},\lambda'}] = [\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{q},\lambda'}] := 0 \;;$$

$$[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{q},\lambda'}] := \begin{cases} \delta_{\vec{k},\vec{q}}\, \delta_{\lambda\lambda'} \,, & \vec{k} \text{ diskret } \left(\text{d.h. } \int d^3\vec{k} \to \sum_{\vec{k}}\right) \\ \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})\, \delta_{\lambda\lambda'} \,, & \vec{k} \text{ kontinuierlich} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}_{\vec{k},\lambda}\, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda} = \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\, \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \delta^{(3)}(\vec{0}) \;\longleftarrow\; \int_V \frac{d^3x}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{0}\cdot\vec{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \;!$$

$$\Rightarrow \quad \hat{H}_{em} = \int d^3\vec{k} \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \left\{ \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\, \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \right\}.$$

OK!

Energiedichte des Vakuums bzw. „kosmologische Konstante"

(iv) Feldoperatoren:

Aus Seite 87:

$$\hat{A}_I(\vec{x},t) = \sqrt{\frac{4\pi c^2\hbar}{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_\lambda \left\{ \vec{e}_{\vec{k},\lambda}\, \hat{a}_{\vec{k},\lambda}\, e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\, \hat{a}^{+}_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}.$$

Schrödinger-Bild erhält man durch $t \to 0$: $\hat{A}(\vec{x}) = \hat{A}_I(\vec{x},0)$.

Setze hier Vektorindizes oben um das Schreiben zu erleichtern.

Vertauschung:

$$\left[\hat{A}^j(\vec{x}), \hat{A}^n(\vec{y})\right] = 4\pi c^2\hbar \int_{\vec{k}}\int_{\vec{q}} \sum_{\lambda,\lambda'} \Big\{ e^j_{\vec{k},\lambda}\, e^{n*}_{\vec{q},\lambda'} \left[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}^{+}_{\vec{q},\lambda'}\right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\vec{q}\cdot\vec{y}}$$
$$+\, e^{j*}_{\vec{k},\lambda}\, e^{n}_{\vec{q},\lambda'} \left[\hat{a}^{+}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{q},\lambda'}\right] e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\vec{q}\cdot\vec{y}} \Big\}$$
$$= 4\pi c^2\hbar \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\vec{k}}} \sum_\lambda \Big\{ e^j_{\vec{k},\lambda}\, e^{n*}_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$
$$-\, e^{j*}_{\vec{k},\lambda}\, e^{n}_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{y}-\vec{x})} \Big\}$$

Es gilt: $\sum_\lambda e^j_{\vec{k},\lambda} e^{n*}_{\vec{k},\lambda} = \delta^{jn} - \frac{k^j k^n}{\vec{k}^2}$, d.h. unverändert in $j \leftrightarrow n$ sowie in $\vec{k} \to -\vec{k}$.

Aufgabe 12.1

Substituiere also $\vec{k} \to -\vec{k}$ im zweiten Term; die Terme kürzen sich und wir bekommen $\left[\hat{A}^j(\vec{x}), \hat{A}^n(\vec{y})\right] = 0$.

Eine nichttriviale Vertauschung entsteht wenn man eine „kanonische Koordinate" mit dem entsprechenden „kanonischen Impuls" vertauscht. Seite 86: $\pi^j = \frac{1}{4\pi c^2}\partial_t A^j$

$$\Rightarrow \hat{\pi}_I(\vec{y},t) = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi c^2}} \int_{\vec{q}} \sum_{\lambda'} \left\{ -i\omega_{\vec{q}}\, \vec{e}_{\vec{q},\lambda'}\, \hat{a}_{\vec{q},\lambda'}\, e^{-i\omega_{\vec{q}}t + i\vec{q}\cdot\vec{y}} + i\omega_{\vec{q}}\, \vec{e}^{\,*}_{\vec{q},\lambda'}\, \hat{a}^{+}_{\vec{q},\lambda'}\, e^{i\omega_{\vec{q}}t - i\vec{q}\cdot\vec{y}} \right\}.$$

Vertauschung:

$$\left[\hat{A}^j(\vec{x}), \hat{\pi}^n(\vec{y})\right] = \hbar \int_{\vec{k},\vec{q}} \sum_{\lambda,\lambda'} \Big\{ +i\omega_{\vec{q}}\, e^j_{\vec{k},\lambda}\, e^{n*}_{\vec{q},\lambda'} \left[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}^{+}_{\vec{q},\lambda'}\right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\vec{q}\cdot\vec{y}}$$
$$-\, i\omega_{\vec{q}}\, e^{j*}_{\vec{k},\lambda}\, e^{n}_{\vec{q},\lambda'} \left[\hat{a}^{+}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{q},\lambda'}\right] e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\vec{q}\cdot\vec{y}} \Big\}$$
$$= i\hbar \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_\lambda \frac{1}{2} \left\{ e^j_{\vec{k},\lambda} e^{n*}_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + e^{j*}_{\vec{k},\lambda} e^{n}_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{y}-\vec{x})} \right\}$$

Substituiere $\vec{k} \to -\vec{k}$ im 2. Term

$$= i\hbar \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left(\delta^{jn} - \frac{k^j k^n}{\vec{k}^2}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$

Notation $\frac{1}{\nabla^2}$ wie auf Seite 84

$$\stackrel{\downarrow}{=} i\hbar \left(\delta_{jn} - \frac{\partial_j \partial_n}{\nabla^2}\right) \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

Fazit: in der Tat wie $[\hat{x}_j, \hat{p}_n] = i\hbar\,\delta_{jn}$, aber enthält eine transversale Projektion, wie es in der Coulomb-Eichung auch sein muss:

$$\partial^x_j \left[\hat{A}^j(\vec{x}), \hat{\pi}^n(\vec{y})\right] = i\hbar \Big(\underbrace{\partial_j \delta_{jn} - \frac{\nabla^2 \partial_n}{\nabla^2}}_{\partial_n - \partial_n}\Big) \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \stackrel{!}{=} 0.$$

Physikalische Größen:

Wie immer ist alles was man direkt mit $\vec A, \phi$ tut eichabhängig, auch die Vertauschungsrelationen. Physikalische Aussagen enthalten $\vec B = \nabla\times\vec A$ und $\vec E = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec A}$. Wir erhalten, in der jetzigen „Eichung" $\nabla\cdot\vec A = |\nabla\phi| = 0$:

$$\hat{\vec E}_I(\vec x,t) = -\frac{1}{c}\partial_t \hat{\vec A}_I(\vec x,t) \overset{!}{=} -4\pi c\, \hat{\vec \pi}_I(\vec x,t)$$

$$\underset{\text{Seite 89}}{=} \sqrt{4\pi\hbar} \int_{\vec k} \sum_{\lambda} i\omega_{\vec k} \left\{ \vec e_{\vec k,\lambda}\, \hat a_{\vec k,\lambda}\, e^{-i\omega_{\vec k}t + i\vec k\cdot\vec x} - \text{H.c.} \right\},$$

„hermitesch konjugiert"

$$\hat{\vec B}_I(\vec y,t) = \nabla\times \hat{\vec A}_I(\vec y,t)$$

$$= \sqrt{4\pi c^2\hbar} \int_{\vec q} \sum_{\lambda'} i\vec q\times \left\{ \vec e_{\vec q,\lambda'}\, \hat a_{\vec q,\lambda'}\, e^{-i\omega_{\vec q}t + i\vec q\cdot\vec y} - \text{H.c.} \right\}.$$

Nichttriviale Vertauschungen entstehen wieder einmal nur aus den gemischten Termen. Aber die Ergebnisse lassen sich auch aus den Ausdrücken auf Seite 89 gewinnen, z.B.

(Keine kovariante Notation hier, d.h. Indizes oben ≡ Indizes unten.)

$$[\hat E^j(\vec x), \hat B^n(\vec y)] = -4\pi c\, [\hat\pi^j(\vec x), \varepsilon^{nkl}\partial^{\vec y}_k \hat A^l(\vec y)]$$

$$= 4\pi c\, \varepsilon^{nkl}\partial^{\vec y}_k\, [\hat A^l(\vec y), \hat\pi^j(\vec x)]$$

$$= 4\pi c\, \varepsilon^{nkl}\partial^{\vec y}_k\, i\hbar \left(\delta_{lj} - \frac{\partial_l\partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^{(3)}(\vec y-\vec x)$$

$$= 4\pi c\hbar i\, \varepsilon^{nkl} \Big(\underbrace{\partial^{\vec y}_k\delta_{lj}}_{\text{antisymmetrisch}} - \underbrace{\frac{\partial_k\partial_l\partial_j}{\nabla^2}}_{\text{symmetrisch}}\Big)\delta^{(3)}(\vec y-\vec x)$$

$$= 4\pi c i\hbar\, \varepsilon^{nkj}\partial^{\vec y}_k\, \delta^{(3)}(\vec y-\vec x)$$

$$= 4\pi c i\hbar\, \varepsilon^{jnk}\partial^{\vec x}_k\, \delta^{(3)}(\vec x-\vec y).$$

Dieses Ergebnis ist „lokal", d.h. $\hat{\vec E}$ und $\hat{\vec B}$, die räumlich getrennt sind, vertauschen miteinander.

(Bei der eichabhängigen $[\hat A^j(\vec x), \hat\pi^n(\vec y)]$ tauchte dagegen ein „nichtlokaler" Term auf (Seite 89):

$$\text{„}\frac{1}{\nabla^2}\text{"} f(\vec x) \overset{\text{Seite 84}}{:=} -\int d^3\vec x'\, \frac{f(\vec x')}{4\pi|\vec x-\vec x'|};$$

$$\text{„}\frac{1}{\nabla^2}\text{"}\delta^{(3)}(\vec x-\vec y) = -\frac{1}{4\pi|\vec x-\vec y|} \neq 0 \quad \text{bei } \vec x\neq\vec y.$$
)