6. Strahlung als Photonen

6.1 Einleitung [Schwabl 14.1-3]

Grundidee: Kap. 5.2 : Klassisches Feld (Gitterschwingungen) $\rightarrow$ Phononen.

Hier : Klassisches Feld (Maxwell / Strahlung) $\rightarrow$ Photonen.

Ausführlicher: Kap. 5.2 : Klassisches bzw. pfadintegralquantisiertes $\boxed{\text{Feld } \phi}$, mit

$$L = \int_V d^3\vec{x}\, \mathcal{L} \quad ; \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{(\partial_t\phi)^2 - c^2|\nabla\phi|^2 - \omega_0^2\phi^2\right\}.$$

Schallgeschwindigkeit

Die „Schallquanten" können im Impulsraum identifiziert werden (weil die entsprechenden Felder dann abgekoppelt voneinander sind); sie tragen die Energie

$$E_{\vec{k}} = \hbar\omega_{\vec{k}}\left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \omega_{\vec{k}} = \sqrt{c^2\vec{k}^2 + \omega_0^2}$$
$$n_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \ldots$$

Klassische Lösung $(V \to \infty)$:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}} \left\{ a_{\vec{k}}\, e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k}}^*\, e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}.$$

Kap. 5.3 : Kanonisch quantisiertes $\boxed{\text{Feld } \hat{\phi}}$ für Teilchen mit kinetischer Energie $E_{\vec{k}} = \hbar\omega_{\vec{k}} n_{\vec{k}}$, wobei $\hbar\omega_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m}$;

$$\hat{H} = \int_V d^3\vec{x}\, \hat{\phi}^+(\vec{x}) \left\{ -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\vec{x}) \right\} \hat{\phi}(\vec{x}).$$

Einteilchenpotential

Es gilt (Aufgabe 11.1):

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{y})] = [\hat{\phi}^+(\vec{x}), \hat{\phi}^+(\vec{y})] = 0, \quad [\hat{\phi}(\vec{x}), i\hbar\hat{\phi}^+(\vec{y})] = i\hbar\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

Kap. 5.4 : $\boxed{\text{Übergang } \hat{\phi} \to \phi}$ (skizziert).

Euklidisch (Seite 77) : $\mathcal{L}_E = \phi^*\left(\hbar\partial_\tau - \mu - \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\vec{x})\right)\phi.$

Minkowski (Seite 74) : $\mathcal{L}_M = \phi^*\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - V(\vec{x})\right)\phi.$

Hier : $\boxed{\text{Übergang } \phi \to \hat{\phi}}$:

ϕ

$\downarrow$

$\{\phi, \vec{A}\}$; $\vec{A}$ = wie Auslenkungen in drei Dimensionen.

$\downarrow$

$\{\phi', \vec{A}'\}$; wähle Eichung in der nur zwei physikalische Freiheitsgrade auftauchen; konstruiere entsprechende L_{em}.

$\downarrow$

$\{\hat{\phi}', \hat{\vec{A}}'\}$; konstruiere entsprechenden $\hat{H}_{em}$.

<u>Eichwahl:</u> Im Kapitel 1.3 wurde ein <u>klassisches</u> Strahlungsfeld betrachtet, welches die Eichbedingungen $\nabla\cdot\vec{A}=0$ (Coulomb) <u>sowie</u> $\phi=0$ erfüllte:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{\lambda}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{i|\vec{k}|}e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \quad ; \; \omega := c|\vec{k}| ; \quad \vec{\lambda}\cdot\vec{k}=0 .$$

Lichtgeschwindigkeit

Dass die beiden gleichzeitig gewählt werden können ist aber nichttrivial und muss begründet werden!

Maxwell-Gleichungen mit $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$, $\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$:

* die homogenen sind automatisch erfüllt;
* die inhomogenen:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \quad\Leftrightarrow\quad -\nabla^2\phi-\frac{1}{c}\partial_t(\nabla\cdot\vec{A}) = 4\pi\rho$$

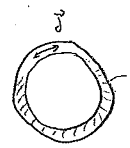
$$\nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad\Leftrightarrow\quad \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}+\frac{1}{c}\partial_t(\nabla\phi)+\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) &= \vec{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m\\ &= \vec{e}_i\,(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\,\partial_j\partial_l A_m\\ &= \vec{e}_i\,\partial_i(\partial_m A_m)-\partial_j\partial_j(\vec{e}_m A_m)\end{aligned}}$$

Wenn wir die Coulomb-Eichung $\nabla\cdot\vec{A}=0$ wählen, gilt also

$$\begin{cases}\nabla^2\phi = -4\pi\rho & \text{(Poisson)}\\ \left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\nabla\dot{\phi}\end{cases}$$

<u>Falls</u> jetzt keine Ladungsdichte vorhanden ist, nur (zeitabhängige) quellenfrei Stromkreise $(\nabla\cdot\vec{j}=0)$, müssen wir die Laplace-Gleichung $\nabla^2\phi=0$ lösen. Bekannterweise gibt es aber in $\mathbb{R}^3$ keine überall regulären Lösungen außer $\phi=\mathrm{const}$ $\Rightarrow$ die Gleichungen



$$\begin{cases}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\\ \nabla\cdot\vec{A}=0\\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \vec{E}=-\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\end{cases}$$

liefern eine vollständige Beschreibung der Physik.

<u>Bemerkung:</u> Auch bei $\rho\neq 0$ kann ϕ unabhängig von $\vec{A}$ bestimmt werden:

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho \quad\Rightarrow\quad \phi(\vec{x},t) = \int_V d^3x'\,\frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \qquad \text{(Theorie I)}$$

$$\text{bzw.}\quad \phi(\vec{x},t) = \text{„}\frac{1}{\nabla^2}\text{"}\,(-4\pi\rho(\vec{x},t)) \qquad \text{(vgl. Seite 16)}$$

sinnvoll im Impulsraum

$$\Rightarrow \frac{1}{c}\nabla\dot{\phi} = -\frac{4\pi}{c}\cdot\nabla\,\text{„}\frac{1}{\nabla^2}\text{"}\,\partial_t\rho(\vec{x},t)$$

$$\overset{\partial_t\rho+\nabla\cdot\vec{j}=0}{=} \frac{4\pi}{c}\cdot\nabla\,\text{„}\frac{1}{\nabla^2}\text{"}\,\nabla\cdot\vec{j}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)A_j = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\left(\delta_{jk}-\frac{\partial_j\partial_k}{\nabla^2}\right)j_k}_{\text{„transversaler Teil" der Stromdichte.}}$$

Klassische Hamilton-Funktion:

Laut Theorie I / IV kann die Energiedichte der elektromagnetischen Felder als

$$e_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$$

ausgedrückt werden. Die entsprechende Energie bzw. Hamilton-Funktion ist

$$H_{em} = \frac{1}{8\pi}\int_V d^3\vec{x}\,\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_V d^3\vec{x}\left\{\left(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\right)\cdot\left(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\right) + (\nabla\times\vec{A})\cdot(\nabla\times\vec{A})\right\}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_V d^3\vec{x}\left\{\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{A}\cdot\partial_t\vec{A} + \partial_j\vec{A}\cdot\partial_j\vec{A} + |\nabla\phi|^2 + \frac{2}{c}\partial_t\vec{A}\cdot\nabla\phi - \partial_j A_k\partial_k A_j\right\}.$$

$$\boxed{\begin{aligned}(\nabla\times\vec{A})\cdot(\nabla\times\vec{A}) &= \varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k\,\varepsilon_{ilm}\,\partial_l A_m\\ &= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\,\partial_j A_k\partial_l A_m\\ &= \partial_j\vec{A}\cdot\partial_j\vec{A} - \partial_j A_k\partial_k A_j\end{aligned}}$$

Mit periodischen bzw. verschwindenden Randbedingungen können partielle Integrationen durchgeführt werden; dadurch verschwinden die zwei letzten Terme:

$$\int_V d^3\vec{x}\;\partial_t A_j\,\vec{\partial}_j\phi = -\int_V d^3\vec{x}\;\underbrace{\partial_t A_j\overleftarrow{\partial}_j}_{\nabla\cdot\vec{A}}\phi \overset{\text{Coulomb}}{=} 0\;;$$

$$\int_V d^3\vec{x}\;\partial_j A_k\,\vec{\partial}_k A_j = -\int_V d^3\vec{x}\;\partial_j A_k\overleftarrow{\partial}_k A_j$$

$$= +\int_V d^3\vec{x}\;(\partial_k A_k)(\partial_j A_j) \overset{\text{Coulomb}}{=} 0\,.$$

Mit $\phi\to$ const. verschwindet auch $|\nabla\phi|^2$.

Insgesamt erhalten wir in der „Strahlungseichung" $(\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0)$ also

$$H_{em} = \frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\left\{\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2c^2}\left[(\partial_t A_k)^2 + c^2|\nabla A_k|^2\right]\right\}_{\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0}.$$

Wechselwirkung mit Materie:

Alles bleibt beim Alten (Kapitel 1.3 bzw. 3.1):

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) + q\phi$$

(klassisches Teilchen, klassisches Feld)

bzw.

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{q}{2mc}\left[\hat{\vec{p}},\vec{A}(\hat{\vec{x}},t)\right] - \frac{q}{mc}\vec{A}(\hat{\vec{x}},t)\cdot\hat{\vec{p}} + \frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2(\hat{\vec{x}},t) + q\phi(\hat{\vec{x}},t)$$

(quantisiertes Teilchen, klassisches Feld).

Klassische Lagrange-Funktion:

Laut Theorie IV:

$$L_{em} = -\frac{1}{16\pi}\int_V d^3\vec{x}\; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad \Big|\; F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$= -\frac{1}{16\pi}\int_V d^3\vec{x}\;\left\{-2F_{0j}F_{0j} + F_{jk}F_{jk}\right\}$$

$$= -\frac{1}{16\pi}\int_V d^3\vec{x}\;\Big\{-2\left(\tfrac{1}{c}\dot{A}_j - \partial_j A_0\right)\left(\tfrac{1}{c}\dot{A}_j - \partial_j A_0\right)$$

$$+ \partial_j A_k \partial_j A_k - 2\partial_j A_k \partial_k A_j + \underset{j}{\partial_k}\underset{k}{A_j}\underset{j}{\partial_k}\underset{k}{A_j}\Big\}$$

Hier $A_0 = \phi$ und die gemischten Terme verschwinden wie auf Seite 85.

Falls auch $|\nabla\phi| \to 0$:
$$L_{em} = \frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\;\left\{\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2c^2}\left[(\partial_t A_k)^2 - c^2|\nabla A_k|^2\right]\right\}_{\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0}$$

Check: Legendre-Transformation:

(i) identifiziere kanonische Koordinaten $\Rightarrow$ A_k (?).

(ii) bestimme kanonische Impulse: $\pi_k := \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = \dfrac{1}{4\pi c^2}\,\partial_t A_k$.

(iii) transformiere:
$$H_{em} = \int_V d^3\vec{x}\sum_{k=1}^{3}\partial_t A_k\,\pi_k - L_{em}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{1}{c^2}(\partial_t A_k)^2 - \frac{1}{2c^2}\left[(\partial_t A_k)^2 - c^2|\nabla A_k|^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_V d^3\vec{x}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{1}{2c^2}\left[(\partial_t A_k)^2 + c^2|\nabla A_k|^2\right]\right\}_{\nabla\cdot\vec{A} = |\nabla\phi| = 0}$$

Es scheint zu funktionieren!

Wechselwirkung mit Materie:

Wie im Kapitel 1.3 (Seite 11):
$$L = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + \frac{q}{c}\,\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x},t) - q\,\phi(\vec{x},t).$$

Oder „kovariant", wie in Theorie IV:

$$\rho := q\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t))$$
$$\vec{j} := q\,\dot{\vec{x}}(t)\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t))$$
$$J^\mu := \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}; \qquad A_\mu := \begin{pmatrix} \phi \\ -\vec{A} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; L = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} - \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}\;J^\mu(\vec{x},t)\,A_\mu(\vec{x},t).$$

— o — o —