4.5 Semiklassischer Limes [Sakurai 2.4; Münster 23.2.6]

(auch: „Sattelpunktnäherung"; „WKB" (Wentzel-Kramers-Brillouin) - Näherung; „eikonale" Näherung; „Gamow-Faktor" beim Tunneleffekt, und andere; es gibt viele nah verwandte Begriffe.)

In „Minkowski"-Zeit (vgl. Seiten 46, 49):

$$x(t') = x_{cl}(t') + \delta x(t') \; ; \quad x_{cl}(t') = \text{Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen bei gegebenen Randbedingungen.}$$

$$\Rightarrow \quad K = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int_{\delta x(0)=0}^{\delta x(t)=0} \mathcal{D}\delta x(t')\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \int_0^t dt'' \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta x(t')\delta x(t'')} \delta x(t')\delta x(t'') + \dots}$$

In „euklidischer" Zeit (vgl. Seiten 55-58):

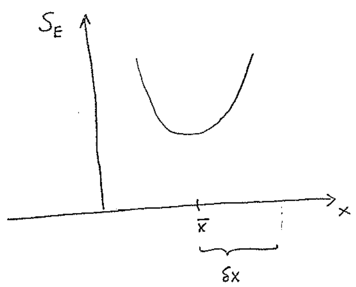
$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) + \delta x(\tau) \; ; \quad \bar{x}(\tau) = \text{Lösung der „euklidischen" Bewegungsgleichungen } \delta S_E/\delta\bar{x} = 0, \text{ mit Randbedingungen } \bar{x}(\beta\hbar) = \bar{x}(0).$$

$$\Rightarrow \quad Z = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}(0)\, e^{-\frac{1}{\hbar}\bar{S}_E} \int_{\delta x(0)=0}^{\delta x(\beta\hbar)=0} \mathcal{D}\delta x(\tau)\, e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^{\beta\hbar} d\tau' \frac{1}{2}\frac{\delta^2 S_E}{\delta x(\tau)\,\delta x(\tau')}\delta x(\tau)\delta x(\tau') + \dots}$$

Der zweite Fall ist besonders interessant, weil dieser auch dann funktionieren kann, wenn keine klassische Bewegung möglich ist, z.B. beim Tunneleffekt.

(Notabene: $\frac{\delta S_E}{\delta \bar{x}} = 0$ kann auch mehrere Lösungen besitzen.)

Einfaches Beispiel:
(normales Integral, wie $\int d\bar{x}(0)$ bei Z)



$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{\hbar}S_E(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\delta x\, e^{-\frac{1}{\hbar}\left[S_E(\bar{x}) + \underbrace{S_E'(\bar{x})}_{=0}\delta x + \frac{1}{2}S_E''(\delta x)^2 + \frac{1}{3!}S_E'''(\delta x)^3 + \frac{1}{4!}S_E^{(4)}(\delta x)^4 + \dots\right]}$$

$$\overset{\delta x =: y\sqrt{\hbar}}{=} e^{-\frac{\bar{S}_E}{\hbar}} \sqrt{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac{1}{2}S_E'' y^2 - \frac{\sqrt{\hbar}}{3!}S_E''' y^3 - \frac{\hbar}{4!}S_E^{(4)} y^4 + \dots}$$

$$= e^{-\frac{\bar{S}_E}{\hbar}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{S_E''}} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\hbar}}{3!}S_E'''\langle y^3\rangle - \frac{\hbar}{4!}S_E^{(4)}\langle y^4\rangle + \frac{\hbar}{2(3!)^2}(S_E''')^2\langle y^6\rangle + \dots \right\}$$

wobei $\langle y^n \rangle := \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^n\, e^{-\frac{1}{2}S_E'' y^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac{1}{2}S_E'' y^2}}$.

Hier kann das Wick-Theorem (Seite 56) benutzt werden!

$$\Rightarrow \quad \langle y^3 \rangle = 0, \quad \langle y^4 \rangle = \frac{3}{(S_E'')^2} \; ; \quad \langle y^6 \rangle = \frac{5\cdot 3}{(S_E'')^3}$$

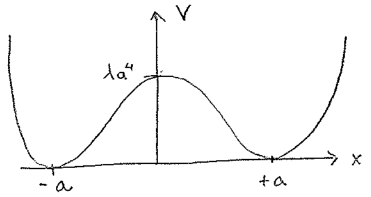
$$\Rightarrow \quad Z = e^{-\frac{\bar{S}_E}{\hbar}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{S_E''}} \left\{ 1 + \hbar\left[-\frac{S_E^{(4)}}{8(S_E'')^2} + \frac{5}{24}\frac{(S_E''')^2}{(S_E'')^3}\right] + \mathcal{O}(\hbar^2) \right\}.$$

„semiklassisch"   „Fluktuationsdeterminante"   „∞"   „⊖"

Wichtiges Beispiel:

[Coleman, „Aspects of Symmetry", Kapitel 7.2]

$$V(x) := \lambda\,(x^2 - a^2)^2$$



(wie der anharmonische Oszillator auf Seite 56 aber umgekippt)

In der Nähe von $x = a$:

$$V(x) = \lambda\,(x+a)^2 (x-a)^2 \approx 4\lambda a^2 (x-a)^2$$

$\Rightarrow$ wie ein harmonischer Oszillator mit $m\omega^2 = 8\lambda a^2$

$\Rightarrow$ ein zweifach (um $\pm a$) entarteter Grundzustand mit $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$?

Nein, es gibt keine Entartung!!

Sattelpunktlösungen:

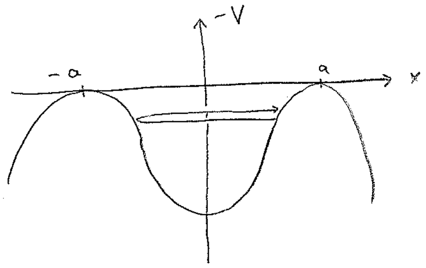
Betrachte „Z um $x = +a$" oder, um genauer zu sein, $K := \langle a | e^{-\beta \hat{H}} | a \rangle$.

Pfadintegraldarstellung:

$$\underbrace{\int da}_{Z} \underbrace{\int_{x(0)=a}^{x(\beta\hbar)=a} \mathcal{D}x(\tau)\, \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V(x) \right] \right\}}_{K} .$$

Sattelpunkt: $\frac{\delta S_E}{\delta \bar{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} = V'(\bar{x})$.

Vergleiche mit Newton: $\quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -V'(x)$.

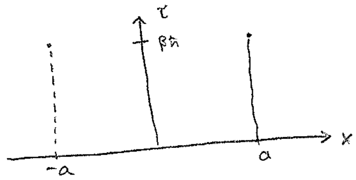


$\Rightarrow$ wie klassische Bewegung aber mit Potential $-V$!

$\Rightarrow$ periodische Bahnen sind möglich ! (vgl. Aufgabe 9.3)

Mögliche Lösungen:

* $\bar{x}(\tau) = a \quad \forall \tau \in (0, \beta\hbar)$
$\;\;\bar{x}(\tau) = -a \quad \forall \tau \in (0, \beta\hbar)$

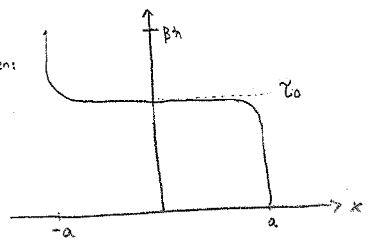


* „Instanton" := nichttriviale Lösung euklidischer Bewegungsgleichungen:

$$\bar{x}(\tau) = a \tanh\left[\frac{\omega}{2}(\tau_0 - \tau)\right]$$

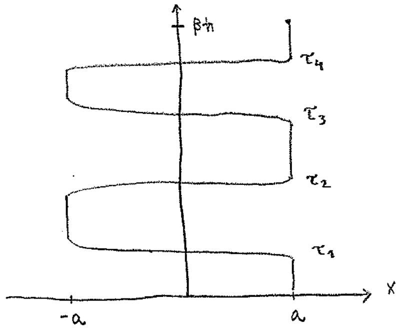
Aufgabe 9.3

(eigentlich nur bei $\beta\hbar \to \infty$!)



* „Flüssigkeit" aus Instantonen und „Anti-Instantonen".

(explizite Konstruktion ??)



Pfadintegral um den Sattelpunkt:

Schreibe $x(\tau) = \bar{x}(\tau) + \overbrace{\sum_n c_n f_n(\tau)}^{\delta x(\tau)}$; $f_n(0) = f_n(\beta\hbar) = 0$.

Wähle $f_n(\tau)$ als Eigenfunktionen des Operators $-m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))$:

$$\left[-m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))\right] f_n(\tau) = \lambda_n f_n(\tau).$$

Orthonormiere $f_n(\tau)$ als $\int_0^{\beta\hbar} d\tau\, f_n(\tau) f_m(\tau) = \delta_{nm}$.

Integrationsmaß : $\int \mathcal{D}\delta x(\tau) \stackrel{!}{=} J \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}}$.

Dann gilt:
$$\int \mathcal{D}\delta x(\tau) \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_0^{\beta\hbar} d\tau \left[\underbrace{\frac{m}{2}\left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right)^2 + V(\bar{x})}_{\bar{S}_E} + \underbrace{m\frac{d\bar{x}}{d\tau}\frac{d\delta x}{d\tau} + V'(\bar{x})\delta x}_{\left(\underbrace{-m\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} + V'(\bar{x})}_{0}\right)\delta x} + \frac{m}{2}\frac{d\delta x}{d\tau}\frac{d\delta x}{d\tau} + \frac{1}{2}V''(\bar{x})(\delta x)^2 + \dots\right]\right\}$$

partielle Integration

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\delta x(\tau)\left[-m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x})\right]\delta x(\tau) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n,n'} c_{n'} f_{n'}(\tau)\, \lambda_n\, c_n f_n(\tau) \end{aligned}\right\}$$

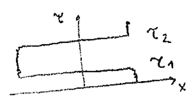
$$\approx e^{-\frac{\bar{S}_E}{\hbar}} \cdot J \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\sum_n \lambda_n c_n^2\right\}$$

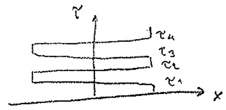
falls $\lambda_n \neq 0$!

$$\stackrel{\downarrow}{=} e^{-\frac{\bar{S}_E}{\hbar}} \cdot J \cdot \prod_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \stackrel{!}{=} e^{-\frac{\bar{S}_E}{\hbar}} \cdot J \cdot \left[\det\left(-m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x})\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Instantonsumme ($\beta\hbar \to \infty$)

$$Z = Z_0 + Z_2 + Z_4 + \dots$$





$$Z_0 = J\left[\det\left(-m\frac{d^2}{d\tau^2} + \underbrace{V''(a)}_{m\omega^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = Z_{HO} \underset{\text{Seite 56}}{=} \frac{1}{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}} \underset{\beta\hbar\to\infty}{\approx} e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} .$$

$$Z_2 \approx Z_0 \cdot \int_0^{\beta\hbar} d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \left\{\omega_{inst}\right\}^2$$; $\omega_{inst} :=$ Beitrag eines Instantons (Seite 62)

$$Z_4 \approx Z_0 \cdot \int_0^{\beta\hbar} d\tau_4 \int_0^{\tau_4} d\tau_3 \int_0^{\tau_3} d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \left\{\omega_{inst}\right\}^4$$

$$\Rightarrow Z = Z_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (\beta\hbar)^{2n} (\omega_{inst})^{2n} = Z_0 \cosh(\beta\hbar\,\omega_{inst})$$

$$\stackrel{\beta\hbar\to\infty}{=} e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \cdot \frac{e^{\beta\hbar\omega_{inst}} + e^{-\beta\hbar\omega_{inst}}}{2}$$ (weil wir um $x = \pm a$ sind)

$$\Rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \pm \hbar\omega_{inst}$$ $\Rightarrow$ Entartung erhoben!

Beitrag eines Instantons:

Instanton ist τ-abhängige Lösung von $m\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} - V'(\bar{x}) = 0$.

Nehme Ableitung bzgl. τ $\Rightarrow$ $\left(m\frac{d^2}{d\tau^2} - V''(\bar{x})\right)\frac{d\bar{x}}{d\tau} = 0$

$\Rightarrow$ es gibt eine nichttriviale Funktion $f_0 \propto \frac{d\bar{x}}{d\tau}$ mit Eigenwert $\lambda_0 = 0$!

(Gibt es auch negative Eigenwerte? Aufgabe 9.3 $\Rightarrow$ $\bar{x}$ ist monoton $\Rightarrow$ $\frac{d\bar{x}}{d\tau}$ hat keine Nullstellen (Knoten) $\Rightarrow$ $\frac{d\bar{x}}{d\tau}$ ist Grundzustand $\Rightarrow$ nein!)

Die „Nullmode" kann nicht innerhalb von det(…) sein, sondern muss separat behandelt werden.

Behandlung der Nullmode (Skizze):

(i) Normierung: Wir wollen (Seite 61): $\int_0^{\beta\hbar} d\tau\, f_0(\tau) f_0(\tau) = 1$.

Es gilt (Aufgabe 9.3): $\int_0^{\beta\hbar} d\tau\, m\left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right)^2 = \bar{S}_E$

$\Rightarrow$ $f_0(\tau) = \sqrt{\frac{m}{\bar{S}_E}}\frac{d\bar{x}}{d\tau}$.

(ii) Integrationsbereich: Bemerke: $\bar{x}(\tau) + c_0 f_0(\tau) = \bar{x}(\tau) + c_0\sqrt{\frac{m}{\bar{S}_E}}\frac{d\bar{x}(\tau)}{d\tau} \overset{!}{\approx} \bar{x}\left(\tau + c_0\sqrt{\frac{m}{\bar{S}_E}}\right)$

$\Rightarrow$ Nullmode entspricht Translation des Instantons

$\Rightarrow$ $0 \le \underbrace{c_0\sqrt{\frac{m}{\bar{S}_E}}}_{=:\tau_0} \le \beta\hbar$.

(iii) Integral: $\int\frac{dc_0}{\sqrt{2\pi\hbar}} \to \sqrt{\frac{\bar{S}_E}{2\pi\hbar m}}\int_0^{\beta\hbar} d\tau_0$ ← genau die Integrale, die wir schon auf Seite 61 hatten!

Endergebnis: (Seiten 61, 62)

Normierung durch Z_0 wie auf Seite 61

$$\boxed{\omega_{inst} = \left(\frac{\bar{S}_E}{2\pi\hbar m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\det\left[-m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(a)\right]}{\det'\left[-m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x})\right]}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\bar{S}_E}{\hbar}}}$$

„Nullmode" „ohne Nullmode"

wobei $\boxed{\bar{S}_E = \int_{-a}^{a} d\bar{x}\sqrt{2mV(\bar{x})}}$. (vgl. „Gamow-Faktor" für den Tunneleffekt)

Aufgabe 9.3

Fazit: Semiklassische (Instanton)-Berechnungen enthalten oft viel „Argumentieren"; es ist z.B. nicht klar, wie man systematisch die Genauigkeit der Antwort verbessern könnte. Trotzdem sind solche Methoden äußerst einflußreich in vielen Bereichen der Quantenmechanik gewesen (vgl. magnetischer Monopol).

— o —