4.3 Störungsreihe [Feynman-Hibbs 6.1-3]

Seiten 43-45: $$K(y,t;x,0) = \langle y | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} | x \rangle = \int_{x(0)=x}^{x(t)=y} \mathcal{D}x(t') \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right]\right\},$$

$$\Psi(y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; K(y,t;x,0)\, \Psi(x,0).$$

Die Idee: Für einfache Systeme ($V(x)=0$, fx, $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$) war die Berechnung des Pfadintegrals relativ aufwendig, aber letztendlich trotzdem möglich (Kapitel 4.2). Komplizierte Systeme können dagegen relativ einfach behandelt werden, weil das Integrationsmaß unabhängig von V ist, und die Grundformel für ein beliebiges V gilt. Insbesondere können unterschiedliche Näherungsmethoden mittels des Pfadintegralformalismus hergeleitet werden.

Entwicklung in V: Sei $\int_0^t dt'\, V(x(t')) \ll \int_0^t dt' \frac{m}{2}[\dot{x}(t')]^2$ für „typische Pfade" (?).

In der Wirkung ist alles „klassisch", d.h. reelle Zahlen, keine Operatoren.

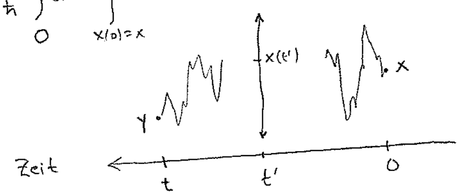
Es gilt: $$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right]\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \frac{m}{2}\dot{x}^2\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\, V(x)\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \frac{m}{2}\dot{x}^2\right\}\left\{1 - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\, V(x) + \frac{1}{2!}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt'\, V(x(t')) \int_0^t dt''\, V(x(t'')) + \ldots\right\}$$

Bezeichnung: $K = K^{(0)} + K^{(1)} + K^{(2)} + \ldots$; Index := Ordnung in V.

$$\Rightarrow K^{(0)}(y,t;x,0) = \int_{x(0)=x}^{x(t)=y} \mathcal{D}x \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \frac{m}{2}\dot{x}^2\right\}$$

$$\Rightarrow K^{(1)}(y,t;x,0) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \int_{x(0)=x}^{x(t)=y} \mathcal{D}x\; V(x(t'))\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'' \frac{m}{2}\dot{x}^2\right\}$$

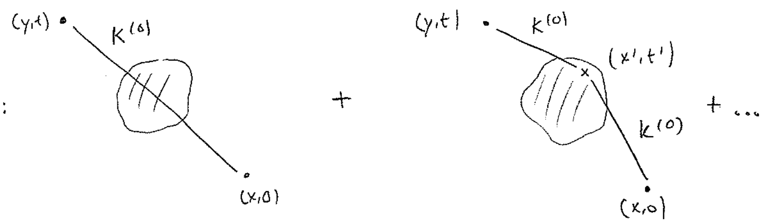


Schreibe: $$\int_0^t dt'' \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \int_0^{t'} dt'' \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \int_{t'}^t dt'' \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

$$\int_{x(0)=x}^{x(t)=y} \mathcal{D}x = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{x(t')=x'}^{x(t)=y} \mathcal{D}x \int_{x(0)=x}^{x(t')=x'} \mathcal{D}x$$

$$\Rightarrow K^{(1)}(y,t;x,0) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx'\; K^{(0)}(y,t;x',t')\, V(x')\, K^{(0)}(x',t';x,0)$$

Wie auf Seite 22 :



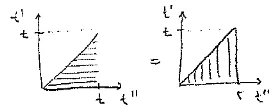
Zweite Ordnung:

Wir haben bis jetzt nicht entschieden, was mit $K^{(0)}(y,t;x,0)$ bei $t<0$ passiert. Sei jetzt die retardierte Greensche Funktion gewählt (vgl. Aufgabe 3.1; Seite 43):

$$K^{(0)} \to K^{(0)}_{ret} \; ; \quad K^{(0)}_{ret}(y,t;x,0) = 0, \quad t<0 .$$

Die zweifache Zeitintegration $\left(x' := x(t') ;\; x'' := x(t'') \right)$:

$$\int_0^t dt' \, V(x') \int_0^t dt'' \, V(x'') = \int_0^t dt' \, V(x') \int_0^{t'} dt'' \, V(x'') + \underbrace{\int_0^t dt' \, V(x') \int_{t'}^t dt'' \, V(x'')}$$



$$= \int_0^t dt' \, V(x') \int_0^{t'} dt'' \, V(x'') + \underbrace{\int_0^t dt'' \, V(x'') \int_0^{t''} dt' \, V(x')}_{\text{umnenne hier } t' \to t'',\; t'' \to t'}$$

$$= \underbrace{2 \int_0^t dt' \, V(x') \int_0^{t'} dt'' \, V(x'')}_{t > t' > t'' > 0} = 2 \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \, \Theta(t'-t'') V(x') V(x'')$$

!

Die 2 kürzt sich gegen $\frac{1}{2!}$, und wir erhalten

$$K^{(2)}(y,t;x,0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^t dt'' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \, K^{(0)}(y,t;x',t') \, V(x') \, K^{(0)}_{ret}(x',t';x'',t'') \, V(x'') \, K^{(0)}(x'',t'';x,0)$$

$$\overset{!}{\Rightarrow} \quad K^{(2)}_{ret}(y,t;x,0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{t} dt'' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \, K^{(0)}_{ret}(y,t;x',t') \, V(x') \, K^{(0)}_{ret}(x',t';x'',t'') \, V(x'') \, K^{(0)}_{ret}(x'',t'';x,0)$$

Höhere Ordnungen:

$$K_{ret} = K^{(0)}_{ret} + K^{(1)}_{ret} + K^{(2)}_{ret} + \dots$$

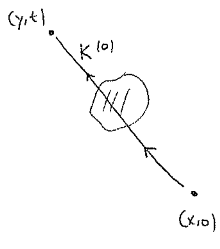
$$= K^{(0)}_{ret} - \frac{i}{\hbar} \int K^{(0)}_{ret} V K^{(0)}_{ret} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \iint K^{(0)}_{ret} V K^{(0)}_{ret} V K^{(0)}_{ret} + \dots$$

$$= K^{(0)}_{ret} - \frac{i}{\hbar} \int K^{(0)}_{ret} V \left[K^{(0)}_{ret} - \frac{i}{\hbar} \int K^{(0)}_{ret} V \left[K^{(0)}_{ret} \right. \right. \dots$$

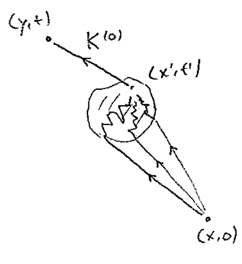
Diese Struktur ist genau wie die Beziehung von $\hat{T}$ und $\hat{V}$ auf Seite 22, d.h. stellt eine iterative Lösung der folgenden Gleichung dar:

$$\boxed{K_{ret}(y,t;x,0) = K^{(0)}_{ret}(y,t;x,0) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, K^{(0)}_{ret}(y,t;x',t') \, V(x') \, K_{ret}(x',t';x,0)}$$

Graphisch:



$-\frac{i}{\hbar} \cdot$



Gleichung für Wellenfunktion: Wenn K_{ret} auf eine Wellenfunktion $\Psi(x,0)$ operiert, z.B. $\Psi(x,0) := \langle x|k_i\rangle$, und über x integriert wird, erhalten wir eine Gleichung für Ψ:

$$\boxed{\Psi(y,t) = \Psi_0(y,t) - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, K^{(0)}_{ret}(y,t;x',t')\,V(x')\,\Psi(x',t') .}$$

Vergleich mit Lippmann-Schwinger: Seiten 16, 17, 19 $\Rightarrow$

$$\underbrace{\langle y|\tilde{k}_i\rangle}_{\text{„exakte Lösung"}} = \underbrace{\langle y|k_i\rangle}_{\text{„freie Lösung"}} + \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, \langle y|\frac{1}{\underbrace{E}_{E=\frac{\hbar^2k_i^2}{2m}}-\hat{H}_0+i\epsilon}|x'\rangle\, V(x')\,\underbrace{\langle x'|\tilde{k}_i\rangle}_{\text{„exakte Lösung"}} .$$

Diese ist eine zeit<u>un</u>abhängige Gleichung; oben hatten wir eine zeit<u>ab</u>hängige Beschreibung. Wenn aber Ψ ein Energie-Eigenzustand ist ($\Psi(x',t') = e^{-\frac{iEt'}{\hbar}}\Psi(x')$); wir den Anfangszeitpunkt nach $\to -\infty$ schicken; und $V(x')$ durch $e^{\frac{\epsilon t'}{\hbar}}$ „regularisieren" (vgl. Seite 9), erhalten wir das Integral

$$-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt'\, \langle y|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t')}|x'\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E+i\epsilon)(t'-t+t)}$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}(E+i\epsilon)t}\,\langle y|\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{+\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_0-E-i\epsilon)(t'-t)}\right\}|x'\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}(E+i\epsilon)t}\,\langle y|\frac{1}{E-\hat{H}_0+i\epsilon}|x'\rangle .$$

Multiplikation mit $e^{+\frac{i}{\hbar}Et}$ $\Rightarrow$ Lippmann-Schwinger!

Bemerkung: Es gibt keinen Grund, bzgl. des ganzen Potentials zu entwickeln; d.h. wenn V z.B. einen quadratischen Teil enthält, wird dieser am besten mittels $K^{(0)}$ exakt behandelt:

$$V = V_0 + V_I ;$$

Taylor-Entwicklung nur bei $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\, V_I(x')\right)$.

Fazit: Innerhalb des Pfadintegralformalismus enthalten die Formeln

$$e^{\frac{i}{\hbar}S} = e^{\frac{i}{\hbar}(S_0+S_I)} = e^{\frac{i}{\hbar}S_0}\,e^{\frac{i}{\hbar}S_I} = e^{\frac{i}{\hbar}S_0}\left(1+\frac{i}{\hbar}S_I+\frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar}S_I\right)^2+\ldots\right)$$

<u>alles</u> was zur Definition der Störungsreihe gebraucht wird.

— · —

Formale Entwicklungen:

[Münster 23.2.1]

Bis jetzt: $K(y,t;x,0) := \langle y|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|x\rangle$.

Beziehung zu Energie-Eigenzuständen (Aufgabe 7.3):

$$\underset{\hat{\mathbb{1}}=\sum_n |n\rangle\langle n|}{\langle y|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|x\rangle} = \sum_n \psi_n(y)\psi_n^*(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}.$$

Insbesondere: $\quad Sp\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|x\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}.$

Definition:

Ein anderer, „zeitgeordneter" (vgl. Seite 4) Propagator wird als

$$G_T(t) := \langle 0|\hat{T}\{\hat{x}_H(t)\hat{x}_H(0)\}|0\rangle := \begin{cases} \langle 0|\hat{x}_H(t)\hat{x}_H(0)|0\rangle, & t \geq 0 \\ \langle 0|\hat{x}_H(0)\hat{x}_H(t)|0\rangle, & t < 0 \end{cases}$$

Vakuumzustand (n=0)

Heisenberg-Operator

definiert.

Beziehung zu Energie-Eigenzuständen (sei $t \geq 0$):

$$\langle 0|\overset{E_0}{e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}\,\hat{x}\,\underset{\hat{\mathbb{1}}=\sum_n|n\rangle\langle n|}{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}\,\hat{x}|0\rangle = \sum_n |\langle 0|\hat{x}|n\rangle|^2\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_0)t}.$$

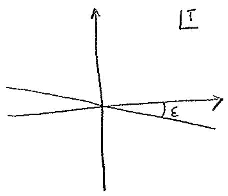
$K \leftrightarrow G_T$:

Betrachte $K(y,T;x,-T)$, $T \gg t$, aber setze $\hat{x}_H(t)\hat{x}_H(0)$ in der Mitte:

$$\langle y|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(T-t)}\underset{\hat{\mathbb{1}}=\sum_p|p\rangle\langle p|}{\hat{x}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\underset{\hat{\mathbb{1}}=\sum_n|n\rangle\langle n|}{\hat{x}}\, \underset{\hat{\mathbb{1}}=\sum_q|q\rangle\langle q|}{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T}}|x\rangle$$

$$= \sum_n\sum_{p,q} \langle y|p\rangle\langle p|\hat{x}|n\rangle\langle n|\hat{x}|q\rangle\langle q|x\rangle\; e^{-\frac{i}{\hbar}E_pT-\frac{i}{\hbar}E_qT-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_p)t}$$

Wir geben jetzt der Zeit einen kleinen Imaginärteil: $T \to Te^{-i\varepsilon}$ („Wick-Drehung").



Für $T\to\infty$ ist $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_pTe^{-i\varepsilon}\right)$ exponentiell klein; nur der Grundzustand ($p=q=0$) gibt einen Beitrag:

$$\approx \langle y|0\rangle \sum_n |\langle 0|\hat{x}|n\rangle|^2 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_0)t}\langle 0|x\rangle\; e^{-\frac{2iE_0Te^{-i\varepsilon}}{\hbar}}.$$

Die zusätzlichen Terme kann man mit K wegdividieren!

$$\Rightarrow \boxed{\langle 0|\hat{T}\{\hat{x}_H(t)\hat{x}_H(0)\}|0\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{\langle y|\hat{T}\{e^{-\frac{2i\hat{H}Te^{-i\varepsilon}}{\hbar}}\hat{x}_H(t)\hat{x}_H(0)\}|x\rangle}{\langle y|e^{-\frac{2i\hat{H}Te^{-i\varepsilon}}{\hbar}}|x\rangle}}.$$

Vorteile von G_T:

* Quotient $\Rightarrow$ In der Pfadintegraldarstellung kürzt sich die Normierung des Integrationsmaßes heraus.
* „Randbedingungen" (x,y) spielen keine Rolle.
* Man „darf" über alle Zeiten integrieren: $S = \int_{-Te^{-i\varepsilon}}^{Te^{-i\varepsilon}} dt'\, L$.
* Trotzdem hat man noch Zugriff auf Informationen über das Energiespektrum.