

# 4. Pfadintegral

## 4.1 Grundlagen

[ Sakurai 2.5 ; Münster 23.1.1-2 ]

Bei Streuung (Seite 7) :  $\langle \vec{k}_f | \hat{U}(t; t_0) | \vec{k}_i \rangle$  ;  $\hat{p} | \vec{k}_i \rangle = \hbar \vec{k}_i | \vec{k}_i \rangle$ .

Jetzt:  $K(\vec{y}, t; \vec{x}, t_0) := \langle \vec{y} | \hat{U}(t; t_0) | \vec{x} \rangle$  ;  $\hat{x} | \vec{x} \rangle = \vec{x} | \vec{x} \rangle$ .

Sei, der Einfachheit halber, Raum vorerst eindimensional ( $\vec{x} \rightarrow x, \vec{p} \rightarrow p$ )  
und der Hamilton-Operator zeitunabhängig :  $\hat{U}(t; t_0) = \exp(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0))$ .

### Warum K?

Sei die Anfangsbedingung  $\Psi(x, t_0)$  bekannt; dann kann die allgemeine Lösung in der Ortsdarstellung formal als

$$\Psi(y, t) = \langle y | \hat{U}(t; t_0) | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx K(y, t; x, t_0) \Psi(x, t_0)$$

$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x|$

ausgedrückt werden.

D.h. K fungiert als „Greensche Funktion“ (vgl. Seite 16), bzw. „Propagator“.

### Eigenschaften

\* „Anfangsbedingung“:

$$K(y, t_0; x, t_0) = \langle y | \hat{1} | x \rangle = \langle y | x \rangle = \delta(y-x)$$

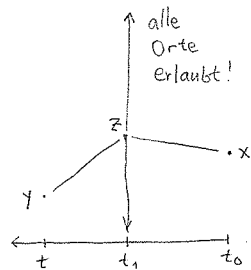
\* „Bewegungsgleichung“:

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t K(y, t; x, t_0) &= \langle y | i\hbar \partial_t \hat{U}(t; t_0) | x \rangle = \langle y | \hat{H} \hat{U}(t; t_0) | x \rangle \\ &= \int dz \underbrace{\langle y | \hat{H} | z \rangle}_{\delta(y-z) \left\{ -\frac{\hbar^2 \partial_z^2}{2m} + V(y) \right\}} K(z, t; x, t_0) = \left( -\frac{\hbar^2 \partial_y^2}{2m} + V(y) \right) K(y, t; x, t_0) \end{aligned}$$

zeitabhängige Schrödinger-Gleichung!

\* „Zerlegung“:

$$\begin{aligned} K(y, t; x, t_0) &= \langle y | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} | x \rangle \\ &= \langle y | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_1)} \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_1-t_0)}}_{\hat{1}} | x \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz K(y, t; z, t_1) K(z, t_1; x, t_0) \end{aligned}$$



### Vergleich mit Bekanntem

\* Aufgabe 3.1  $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} \frac{e^{-iE(t-t_0)/\hbar}}{E - \hat{H}_0 + i0^+} = -\frac{i}{\hbar} \hat{U}_{ret}^{(0)}(t; t_0)$

frei (mit  $\hat{H}_0$ )  
retardiert

\* Seite 17:  $G_+(\vec{x}, \vec{x}') := \frac{\hbar^2}{2m} \langle \vec{x} | \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0^+} | \vec{x}' \rangle \Big|_{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$  ← zeitunabhängig

$$\Rightarrow K_{ret}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t_0) = \langle \vec{x} | \hat{U}_{ret}^{(0)}(t; t_0) | \vec{x}' \rangle = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-\frac{iE(t-t_0)}{\hbar}} \cdot \frac{2m}{\hbar^2} G_+(\vec{x}, \vec{x}') \Big|_{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$



Die Impulsintegrationen sind quadratisch und voneinander abgekoppelt; die können durchgeführt werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-az^2 \pm ibz} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

Jetzt:  $z \rightarrow k$ ;  $a \rightarrow \frac{i\epsilon\hbar}{2m}$ ;  $b \rightarrow x_{j+1} - x_j$

$$\frac{1}{2\pi\epsilon} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \rightarrow \sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}} \exp\left(+i \frac{m(x_{j+1} - x_j)^2}{2\epsilon\hbar}\right)$$

Als Endergebnis erhalten wir

$$K(y, t; x, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{N}{2}} \int \left\{ \prod_{i=2}^N dx_i \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \epsilon \left[ \frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon}\right)^2 - V(x_j) \right] \right\}_{\substack{x_1 = x \\ x_{N+1} = y}}$$

Der Faktor  $\left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{N}{2}}$  ist divergent bei  $N \rightarrow \infty$  aber unabhängig von  $V$ .

Wenn wir diesen Faktor als Bestandteil der Definition des Funktionalintegralmaßes  $\mathcal{D}x(t)$  betrachten, erhalten wir die berühmten Formeln

$$K(y, t; x, t_0) = \int_{\substack{x(t) = y \\ x(t_0) = x}} \mathcal{D}x(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right);$$

$$S = \int_{t_0}^t dt' L(x, \dot{x});$$

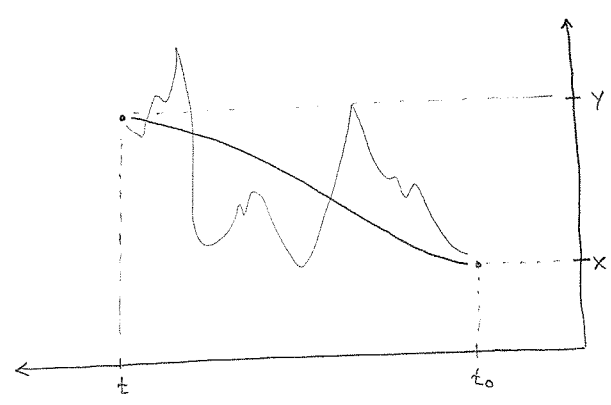
$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x)$$

" Pfadintegral "

" Wirkung "

" Lagrange - Funktion "

Nochmals graphisch:



D.h. skizziere beliebige Bahnkurve zwischen  $(x, t_0)$  und  $(y, t)$ ; bestimme die entsprechende Wirkung  $S = \int_{t_0}^t dt' L(x, \dot{x})$  (angenommen dass  $x(t)$  differenzierbar ist!); bilde Phasenfaktor  $\exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right)$ ; die Übergangsamplitude  $K$  ist die Summe über alle solchen Phasenfaktoren (mod. Konstante).

Klassischer Limes

Ein wichtiger „erster Erfolg“ des Pfadintegralformalismus besteht darin, dass das Hamiltonsche Prinzip bzw. der Lagrange-Formalismus der klassischen Mechanik dadurch „intuitiv“ verstanden werden kann...

Klassischer Limes := „ $\hbar \rightarrow 0$ “ !

Ähnliche Bahnen ergeben unterschiedliche Wirkungen:  $S[x+\delta x] \neq S[x]$ .

Bei  $\hbar \rightarrow 0$  führt dieses zur destruktiven Interferenz, d.h.

$$e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} + e^{\frac{i}{\hbar} S[x+\delta x]} + e^{\frac{i}{\hbar} S[x+\delta x']} + \dots \stackrel{\hbar \rightarrow 0}{\approx} 0$$

es sei denn,  $S$  ist extremal um eine besondere Bahnkurve  $x_{cl}(t)$ ;

d.h.  $S[x_{cl} + \delta x] = S[x_{cl}] + O(\delta x)^2$ .

Dann kann keine Kürzung stattfinden.

Extremalbedingung:

$$S[x_{cl} + \delta x] = \int_{t_0}^t dt' L(x_{cl} + \delta x, \dot{x}_{cl} + \dot{\delta x})$$

$$= \int_{t_0}^t dt' \left\{ L(x_{cl}, \dot{x}_{cl}) + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt'} \delta x + O(\delta x)^2 \right\}$$

$$= S[x_{cl}] + \underbrace{\int_{t_0}^t dt' \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right)}_{\substack{\delta x(t) = \delta x(t_0) = 0 \\ \Rightarrow \text{verschwindet}}} + \underbrace{\int_{t_0}^t dt' \left[ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x}_{\substack{= 0 \quad \forall \delta x \\ \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_{cl}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}} \right) \quad \forall t}}_{\text{Euler-Lagrange!}}$$

Höhere Ordnungen:

$$S[x_{cl} + \delta x] = S[x_{cl}] + \int_{t_0}^t dt' \frac{\delta S[x_{cl}]}{\delta x_{cl}(t')} \delta x(t') + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' \frac{\delta^2 S[x_{cl}]}{\delta x_{cl}(t') \delta x_{cl}(t'')} \delta x(t') \delta x(t'') + \dots$$

„Taylor-Entwicklung“ bzgl.  $\delta x(t)$

Funktionalableitung:  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S[x_{cl} + \epsilon \delta x] - S[x_{cl}]}{\epsilon} = \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \dot{x}} \right)$

Übergangsamplitude:

$$K = \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

$$= \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \left[ S_{cl} + \int \frac{\delta S_{cl}}{\delta x} \delta x + \frac{1}{2} \int \frac{\delta^2 S_{cl}}{\delta x \delta x'} \delta x \delta x' + \dots \right]}$$

$$\approx e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{2\hbar} \int \frac{\delta^2 S_{cl}}{\delta x \delta x'} \delta x \delta x'}$$

klassische Antwort  
die führenden Quantenkorrekturen