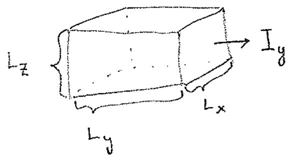
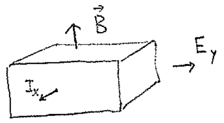
3.2 Quanten-Hall-Effekt

[Nobel-Preis von Klitzing 1985 ; nobelprice.org]



Elektrischer Widerstand : $R_{yy} := \dfrac{V_y}{I_y}$ ← Potentialdifferenz / ← Strom

$= \dfrac{L_y \cdot E_y}{L_x \cdot L_z \cdot j_y}$ ← elektrisches Feld. / ← Stromdichte



Wenn aber ein Magnetfeld in z-Richtung eingeschaltet wird, gibt es einen Strom auch in die x-Richtung!

$$R_{yx} := \frac{V_y}{I_x} = \mathcal{O}(B_z).$$

Was ist die genaue Beziehung zwischen R_{yx} und B_z?

Klassisch :

Lorentz-Kraft : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$

(Außerdem fühlen die Ladungsträger auch eine Reibungskraft.)

Suche nach einer stationären Lösung, unter Vernachlässigung der Reibungskraft ($T \approx 0\,K$) :

$$\vec{F} = q\left(E_y \vec{e}_y + \frac{v_x}{c} \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} B_z\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad E_y = \frac{v_x}{c} B_z .$$

$$\text{Strom} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} \times \text{Fläche} \times \text{Geschwindigkeit} = qn \cdot L_y L_z \cdot v_x$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{yx} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{L_y \cdot E_y}{qn \cdot L_y L_z \cdot v_x} = \frac{\cancel{L_y} \cancel{E_y} \cdot B_z}{qn \cancel{L_y} L_z \cdot c \cancel{E_y}}$$

$$= \frac{B_z}{qncL_z}$$

Wenn es insgesamt N Ladungsträger in unserer Probe gibt, dann ist $n = \frac{N}{L_x L_y L_z}$ und

$$n \cdot L_z = \frac{N}{L_x L_y} =: n_\perp =: \text{Flächendichte}$$

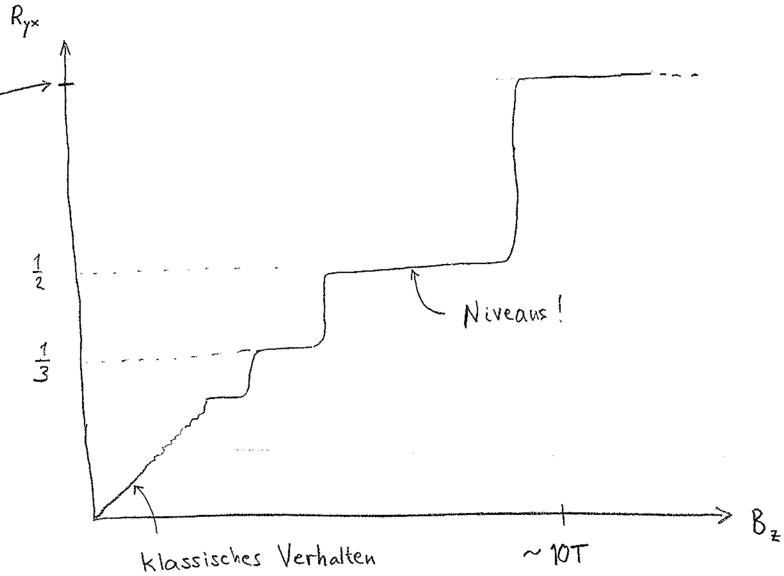
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{R_{yx} = \frac{B_z}{qc\, n_\perp}} .$$

„klassischer Hall-Effekt"

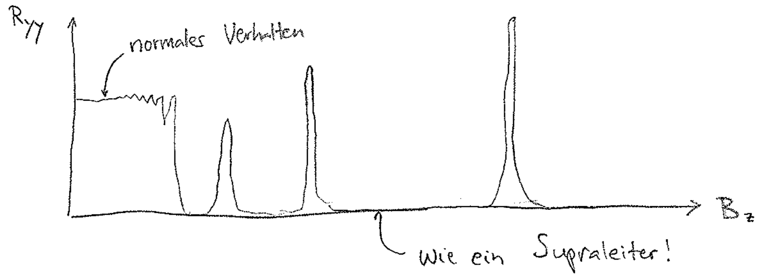
Was wird beobachtet?

$\frac{h}{e^2} = 25812{,}8076\ \Omega$

(=: R_K =: Klitzing-Konstante)



(Auf Seite 34:
$\frac{hc}{e} = 4{,}1357 \times 10^{-15}\ \mathrm{Tm}^2$;
$K_J := \frac{2e}{hc} = 483597{,}9 \times 10^9 \frac{1}{\mathrm{Tm}^2}$
=: Josephson-Konstante)



Quantenmechanisch

Darstellung von $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$, $\vec{E} = E_y \vec{e}_y$:

$$\vec{A} = (-y B_z, 0, 0), \quad \phi = -y E_y$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2m}\left\{\left(-i\hbar\partial_x + \frac{qB_z}{c}y\right)^2 - \hbar^2\partial_y^2 - \hbar^2\partial_z^2\right\} - qyE_y .$$

Es gilt immer noch $[\partial_x, \hat{H}] = [\partial_z, \hat{H}] = 0$, so dass wir uns dem Ansatz

$$\Psi(x,y,z) = \tilde{\varphi}(y)\, e^{i(k_x x + k_z z)}$$

dienen können. Das „senkrechte" Problem reduziert sich also auf eine eindimensionale Gleichung:

$$\left\{-\frac{\hbar^2\partial_y^2}{2m} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\hbar k_x + \frac{qB_z}{c}y\right)^2 - qyE_y}\right\}\tilde{\varphi}(y) = \tilde{E}\,\tilde{\varphi}(y)$$

$$\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \hbar k_x \cdot \frac{qB_z}{mc}\cdot y + \frac{m}{2}\cdot\left(\frac{qB_z}{mc}\cdot y\right)^2 - qE_y\cdot y$$

$$=: \frac{m\omega_B^2}{2}(y-y_0)^2 + \tilde{E}' \quad ; \quad \omega_B = \frac{qB_z}{mc}$$

$$= \frac{m\omega_B^2}{2}y_0^2 + \tilde{E}' - m\omega_B^2 y_0 y + \frac{m}{2}(\omega_B y)^2$$

Es folgt:
$$\begin{cases} \hbar k_x \omega_B - qE_y = -m\omega_B^2 y_0 \\ \dfrac{\hbar^2 k_x^2}{2m} = \dfrac{m\omega_B^2}{2} y_0^2 + \tilde{E}' \end{cases} \Rightarrow \quad y_0 = -\frac{\hbar k_x}{m\omega_B} + \frac{qE_y}{m\omega_B^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{E}' = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} - \frac{m\omega_B^2}{2}\left(-\frac{\hbar k_x}{m\omega_B} + \frac{qE_y}{m\omega_B^2}\right)^2 = \frac{\hbar k_x \cdot qE_y}{m\omega_B} - \frac{(qE_y)^2}{2m\omega_B^2} \; ;$$

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} \cdot n_x, \quad n_x \in \mathbb{Z} .$$

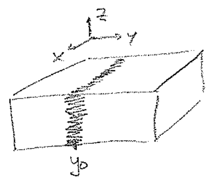
Wie auf Seite 34: $0 < y_0 \leq L_y \Rightarrow$ Entartung $N = \frac{B_z L_x L_y}{\Phi_0}$; $\Phi_0 = \frac{hc}{q}$ = Flußquantum.

Aber Energie hängt jetzt von k_x ab $\Rightarrow$ Entartung erhoben!

Genauer:
$$n_x := -n_{min} - n' , \quad n' = 1, \ldots, N_{max}$$
$$\hbar k_x = -\frac{2\pi\hbar}{L_x}(n_{min} + n')$$
$$y_0 = \underbrace{\frac{qE_y}{m\omega_B^2} + \frac{2\pi\hbar}{m\omega_B L_x} n_{min}}_{:= 0} + \underbrace{\frac{2\pi\hbar c}{qB_z L_x} \cdot n'}_{\leq L_y}$$
$$\tilde{E}' = + \frac{(qE_y)^2}{2m\omega_B^2} - qE_y y_0$$

Spektrum:
$$\tilde{E} = \hbar|\omega_B|\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{m}{2}\left(\frac{cE_y}{B_z}\right)^2 - \frac{hcE_y}{B_z L_x} \cdot n' \; ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots ; \quad n' = 1, \ldots, \frac{B_z L_x L_y}{\Phi_0}$$

Stromdichte:



$$j_x = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left\{\psi^*\left(\partial_x - \frac{iq}{\hbar c}A_x\right)\psi\right\}$$
$$= \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left\{\tilde{\psi}^*(y)\left(ik_x + i\frac{qB_z}{\hbar c}y\right)\tilde{\psi}(y)\right\}$$
$$= |\tilde{\psi}(y)|^2 \left\{\frac{\hbar k_x}{m} + \omega_B y\right\}$$

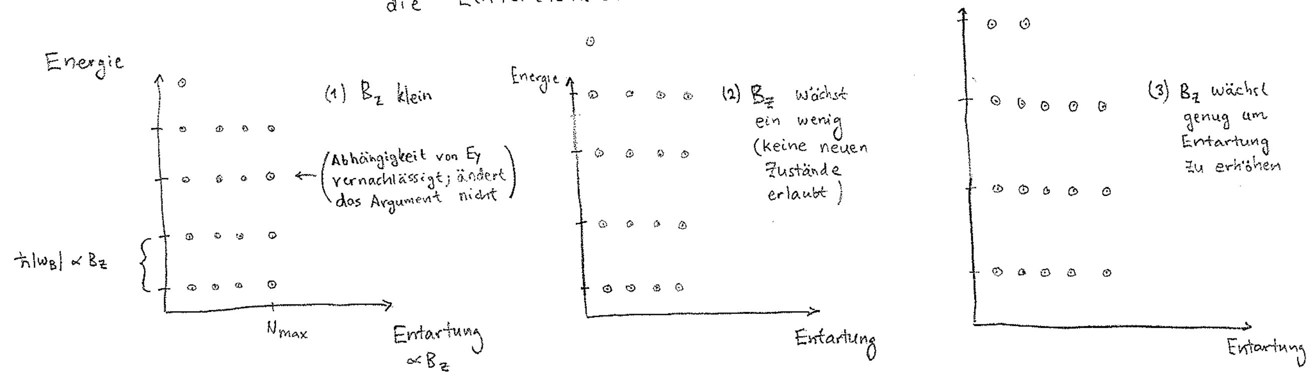
Mittelwert: $\left(\frac{1}{L_y}\int_0^{L_y} dy \, j_x(y)\right)$
$$\langle j_x \rangle = \frac{\hbar k_x}{m} + \omega_B y_0 = \frac{\hbar k_x}{m} - \frac{\hbar k}{m} + \frac{qE_y}{m\omega_B} = c \cdot \frac{E_y}{B_z}$$

Also genau wie die klassische Geschwindigkeit auf Seite 35!

Bemerkung: Es muß natürlich $\frac{\langle v_x \rangle}{c} = \frac{E_y}{B_z} \ll 1$ gelten; andernfalls darf die Reibung nicht vernachlässigt werden!

Fazit:
$$\boxed{\tilde{E} = \hbar|\omega_B|\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}m\langle v_x \rangle^2 - \underbrace{\frac{h\langle v_x \rangle}{L_x} \cdot n'}_{qE_y \cdot y_0}, \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \; n' \in \left\{1, \ldots, \frac{B_z L_x L_y}{\Phi_0}\right\}}$$

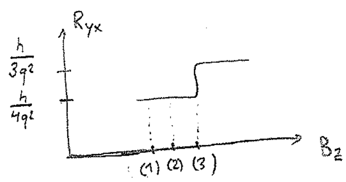
Also was passiert? Bis jetzt ging es um Einteilchenzustände.
In der Praxis haben wir N Elektronen und müssen die Einteilchenzustände bis zur Fermi-Fläche erfüllen.

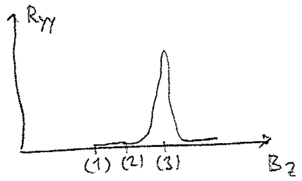


$\nu = 4$ Niveaus voll $\Rightarrow$ wenige freien Streuzustände vorhanden* $\Rightarrow$ $R_{yy} \approx 0$	$\nu = 4$ Niveaus voll	während Umfüllung „viel Bewegung" $\Rightarrow$ Streuung mit wenig Energie möglich $\Rightarrow R_{yy} \neq 0$.
Zustandsdichte: $n_\perp = \frac{\nu N_{max}}{L_x L_y} = \nu \cdot \frac{B_z}{\Phi_0}$	Zustandsdichte: $n_\perp = \nu \cdot \frac{B_z}{\Phi_0}$	Zustandsdichte: $n_\perp = (3 \ldots 4)\,\frac{B_z}{\Phi_0}$

$$R_{yx} = \frac{B_z}{q c\, n_\perp} = \frac{\Phi_0}{\nu \cdot q c} = \frac{h}{\nu q^2}\ ; \quad \nu = 4$$

$$R_{yx} = \frac{h}{(3 \ldots 4)\, q^2}$$





Warnung: Diese Diskussion ist hoch idealisiert!

Bemerkung: Es wurden auch Niveaus mit Bruchzahlen gefunden („gebrochenzahliger" bzw. „fraktionaler" Quanten-Hall-Effekt). Die Erklärung scheint viel schwieriger zu sein, und hat etwas mit Elektron-Elektron-Wechselwirkungen zu tun.
$\Rightarrow$ Nobel-Preis 1998 [Laughlin, Strömer, Tsui].

---

* Einzelne Elektronen werden um Unreinheiten lokalisiert (?).