3. Äußeres Feld

3.1 Landau - Niveaus

[Sakurai 2.6 ; Münster 14.3]

Seite 11:
$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}(\hat{\vec{x}},t)\right)\cdot\left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}(\hat{\vec{x}},t)\right) + q\phi(\hat{\vec{x}},t) \; .$$

Als Erstes möchten wir die Operatorordnung jetzt ordentlich begründen.

Grundprinzip: Physik soll in einer Eichtransformation $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$, $\phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi}$ invariant bleiben!

Implementierung: Weil die Eichtransformation im Ortsraum gegeben ist, betrachten wir die zeitabhängige Schrödinger - Gleichung in der Ortsdarstellung:

$$i\hbar\partial_t |\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \left\{ i\hbar\partial_t - q\phi(\vec{x},t)\right\}\psi(\vec{x},t) = \left\{\frac{1}{2m}\left[-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{x},t)\right]\cdot\left[-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{x},t)\right]\right\}\psi(\vec{x},t) \; .$$

Linke Seite: $-q\phi \;\rightarrow\; -q\phi' = -q\phi + \frac{q}{c}\dot{\chi}$

Versuche diese Änderung durch eine Phasentransformation von ψ zu kürzen:

$$\psi \;\rightarrow\; \psi' = \exp\left(\frac{iq}{\hbar c}\chi\right)\psi \; .$$

Dann gilt:

$$\left\{i\hbar\partial_t - q\phi'\right\}\psi' = \left\{i\hbar\partial_t - q\phi + \frac{q}{c}\dot{\chi}\right\} e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}\psi$$

$$= e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}\left\{ i\hbar\partial_t - q\phi + \cancel{\frac{q}{c}\dot{\chi}} - \cancel{\frac{q}{c}\dot{\chi}}\right\}\psi$$

Rechte Seite: Dieselbe Phasentransformation ergibt

$$\left\{-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}'\right\}\psi' = \left\{-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A} - \frac{q}{c}\nabla\chi\right\} e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}\psi$$

$$= e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}\left\{-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A} - \cancel{\frac{q}{c}\nabla\chi} + \cancel{\frac{q}{c}\nabla\chi}\right\}\psi \; .$$

Folglich dasselbe mit zweiter Ableitung:

$$„\left\{-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}'\right\} e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi} = e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}\left\{-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right\}" \; .$$

Die Gleichung: $e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}$ kürzt sich $\Rightarrow$ die Form der Schrödinger - Gleichung bleibt unverändert.

Fazit: (Nur) die gegebene Ordnung garantiert, dass die Form der Schrödinger - Gleichung und physikalische Größen wie $|\psi|^2$ eichinvariant sind.

(Notation: „kovariante Ableitungen":

$$i\hbar\partial_t - q\phi =: i\hbar D_t \quad \Rightarrow \quad D_t = \partial_t + \frac{iq}{\hbar}\phi$$

$$x^0 := ct,\; A^0 := \phi \quad \Rightarrow \quad D_0 = \partial_0 + \frac{iq}{\hbar c}A_0$$

$$-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A} =: -i\hbar\vec{D} \quad \Rightarrow \quad D_i = \partial_i - \frac{iq}{\hbar c}A^i$$

$$A_i := -A^i \quad \Rightarrow \quad D_i = \partial_i + \frac{iq}{\hbar c}A_i \; .$$
)

Klassisches Teilchen im externen Magnetfeld

Betrachtet wird ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$, dessen Richtung als z-Achse gewählt wird:

$$\vec{B} = B\,\vec{e}_z .$$

Newton: $m\dot{\vec{v}} = \underbrace{\frac{q}{c}\,\vec{v}\times\vec{B}}_{\text{Lorentz-Kraft}}$ (Seite 11 mit $\vec{E}=\vec{0}$).

Lösung: $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$

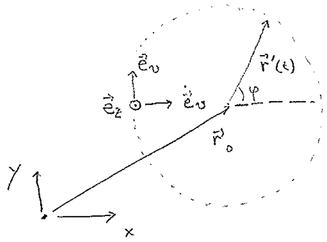
(a) $\vec{B}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) = 0 \;\Rightarrow\; m\dot{\vec{v}}_\parallel = 0 \;\Rightarrow\; \vec{v}_\parallel = \text{const}.$

(b) $m\dot{\vec{v}}_\perp = \frac{q}{c}\,\vec{v}_\perp\times\vec{B}$

Nehme Skalarprodukt mit $\vec{v}_\perp$ $\Rightarrow \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}|\vec{v}_\perp|^2 = \frac{q}{c}\,\vec{v}_\perp\cdot(\vec{v}_\perp\times\vec{B}) = 0$

$\Rightarrow |\vec{v}_\perp| = \text{const}.$

Sei $\vec{e}_v = \frac{\vec{v}_\perp}{|\vec{v}_\perp|} \;\Rightarrow\; \dot{\vec{e}}_v = \underbrace{\frac{qB}{mc}}_{=:\,\omega_B \text{ „Zyklotronfrequenz"}}\,\vec{e}_v\times\vec{e}_z$

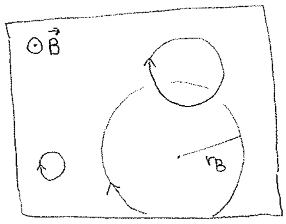


Es geht anscheinend um Kreisbewegung.

Ansatz:

$$\vec{r}' = r_B(\cos\omega_B t\,\vec{e}_x - \sin\omega_B t\,\vec{e}_y)$$
$$\vec{v}_\perp = -\omega_B r_B(\sin\omega_B t\,\vec{e}_x + \cos\omega_B t\,\vec{e}_y)$$
$$\vec{e}_v = -(\sin\omega_B t\,\vec{e}_x + \cos\omega_B t\,\vec{e}_y)$$
$$\dot{\vec{e}}_v = -\omega_B(\cos\omega_B t\,\vec{e}_x - \sin\omega_B t\,\vec{e}_y)$$
$$\vec{e}_v\times\vec{e}_z = -(-\sin\omega_B t\,\vec{e}_y + \cos\omega_B t\,\vec{e}_x)$$
$$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_v = \omega_B\,\vec{e}_v\times\vec{e}_z \quad \text{ok!}$$

Fazit: (senkrechte Ebene; $q>0$!)



$\omega_B = \text{const}$

$|\vec{v}_\perp| = \omega_B\cdot r_B$

r_B und $\vec{r}_0$ bestimmt durch Anfangsbedingungen.

Quantenmechanisches Teilchen im externen Magnetfeld

Als Erstes müssen wir $\vec{A}$ wählen! (Setze $\phi := 0$ weil kein $\vec{E}$ vorhanden.)

Möglichkeiten:

$$\vec{B} \overset{!}{=} \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = (0, xB, 0)\;;\quad \vec{A}' = (-yB, 0, 0)\;;\quad \vec{A}'' = \frac{B}{2}(-y, x, 0) \overset{!}{=} \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$$

liefern alle dasselbe $\vec{B}$ (und entsprechen unterschiedlichen Eichbedingungen).

Bestimmung des Spektrums („cleverer Weg")

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\pi}_x := -i\hbar\partial_x - \frac{q}{c}A_x \\ \hat{\pi}_y := -i\hbar\partial_y - \frac{q}{c}A_y \end{array}\right. \Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2}{2m} - \frac{\hbar^2\partial_z^2}{2m}$$

$[\partial_z, \hat{\pi}_x] = [\partial_z, \hat{\pi}_y] = 0 \Rightarrow [\partial_z, \hat{H}] = 0 \Rightarrow$ Eigenzustände von $\hat{p}_z$ sind Eigenzustände von $\hat{H}$, d.h.

$$E = \tilde{E} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}, \text{ mit}$$

$$\left\{\frac{\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2}{2m}\right\}\tilde{\Psi}(x,y) = \tilde{E}\,\tilde{\Psi}(x,y).$$

Bemerke: $[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = \frac{i\hbar q}{c}(\partial_x A_y - \partial_y A_x) = \frac{i\hbar q B}{c}$.

Vergleiche mit dem harmonischen Oszillator:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \quad \text{mit} \quad [\hat{x},\hat{p}] = i\hbar \quad \text{und} \quad E_n = \hbar|\omega|(n+\tfrac{1}{2}).$$

Sei $\hat{q} := m|\omega|\hat{x}$; dann kann $\hat{H}_0$ umgeschrieben werden:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2 + \hat{q}^2}{2m} \quad \text{mit} \quad [\hat{q},\hat{p}] = im\hbar|\omega| \quad \text{und} \quad E_n = \hbar|\omega|(n+\tfrac{1}{2}).$$

Desweiteren könnte man sich davon überzeugen, wenn eine Herleitung des Energiespektrums von $\hat{H}_0$ vorhanden wäre, dass ein entgegengesetztes Vorzeichen im Wert von $[\hat{q},\hat{p}]$ keinen Einfluß auf das Spektrum $\{E_n\}$ hätte (Umtausch $\hat{p} \leftrightarrow \hat{q}$ in Definitionen von $\hat{a}, \hat{a}^+$); d.h. $[\hat{q},\hat{p}] = im\hbar\omega$ ergäbe dasselbe.

Vergleiche mit unserem System: $\hat{\pi}_x \leftrightarrow \hat{p}$, $\hat{\pi}_y \leftrightarrow \hat{q}$, $\omega \leftrightarrow \frac{qB}{mc} = \omega_B$!

Fazit: Das Energiespektrum der senkrechten Bewegung ist quantisiert:

$$\boxed{E_{n,k_z} = \hbar|\omega_B|\left(n+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Die Niveaus sind als Landau-Niveaus bekannt [Landau 1930].

Entartung der Energie-Eigenzustände?

Obwohl schön, hat der clevere Weg ein Problem versteckt, nämlich dass die Zustände enorm entartet sind! Eigentlich hätten wir dies auch ahnen können: ein zweidimensionales Problem $(\hat{x},\hat{y},\hat{p}_x,\hat{p}_y)$ wurde auf ein eindimensionales reduziert, d.h. eine Dimension „ging verloren". Trotzdem wurde die Verwandtschaft mit dem harmonischen Oszillator klar, und dies wird uns auch bei der expliziten Lösung (Seite 34) helfen.

Bestimmung des Spektrums und der Entartung („expliziter Weg")

Sei $\vec{A} := (-yB, 0, 0)$. (Seite 32)

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2m}\left\{\left(-i\hbar\partial_x + \frac{qB}{c}y\right)^2 - \hbar^2\partial_y^2 - \hbar^2\partial_z^2\right\}$$

$\hat{H}$ enthält keine Abhängigkeit von x, z $\Rightarrow$ $[\partial_x, \hat{H}] = [\partial_z, \hat{H}] = 0$

$\Rightarrow$ kann Eigenzustände von $\hat{p}_x, \hat{p}_z$ benutzen.

Also:
$$\begin{cases} \Psi(x,y,z) := \tilde{\Psi}(y)\, e^{ik_x x + ik_z z}, \\ \frac{1}{2m}\left\{\left(\hbar k_x + \frac{qB}{c}y\right)^2 - \hbar^2\partial_y^2\right\}\tilde{\Psi}(y) = \tilde{E}\,\tilde{\Psi}(y), \\ E = \tilde{E} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}. \end{cases}$$

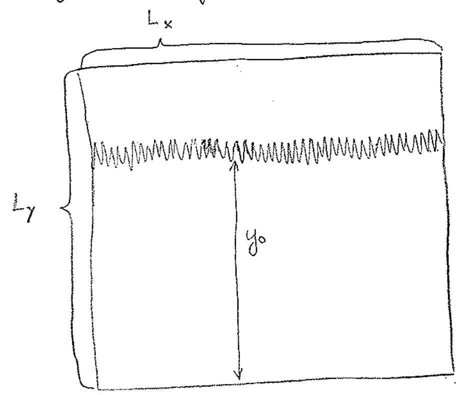
Hier: $\frac{1}{2m}\left(\hbar k_x + \frac{qB}{c}y\right)^2 = \frac{m}{2}\cdot\left(\frac{qB}{mc}\right)^2\left(y + \frac{\hbar k_x c}{qB}\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega_B^2(y-y_0)^2$; $y_0 := \frac{-\hbar k_x c}{qB}$

$$\Rightarrow \left\{\frac{-\hbar^2\partial_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_B^2(y-y_0)^2\right\}\tilde{\Psi}(y) = \tilde{E}\,\tilde{\Psi}(y)$$

$\Rightarrow$ wieder der harmonische Oszillator, aber mit einer Wellenfunktion, die um $y = y_0 = -\frac{\hbar k_x c}{qB}$ lokalisiert ist!

$\Rightarrow$ Energiespektrum bleibt bei $\boxed{E_{n,k_z} = \hbar|\omega_B|\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}}$ (vgl. Seite 33).

<u>Entartung</u>: k_x beliebig $\Rightarrow$ regularisiere durch Würfelnormierung wie auf Seite 10.



(Keine Kreise? $\Rightarrow$ Aufgabe 5.2!)

Periodizität um L_x $\Rightarrow$ $k_x = \frac{2\pi}{L_x}\cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Periodizität um L_y $\Rightarrow$ $|y_0|_{max} = \left|\frac{\hbar k_x c}{qB}\right|_{max} = L_y$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{\hbar\, 2\pi c}{qB L_x} n_{max}\right| = L_y$$

$$\Rightarrow \text{Entartung} = |n_{max}| = \frac{B L_x L_y}{\left|\frac{hc}{q}\right|} =: \frac{\Phi_B}{\Phi_0}$$

Φ_B ← magnetischer Fluß

Φ_0 ← Flußquantum!