Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 14**	02.02.2011

Aufgabe 1: Clifford-Algebra in zwei räumlichen Dimensionen.
Die Pauli-Matrizen σ_k erfüllen die Algebra

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl}\, \mathbb{1} + i \sum_m \epsilon_{klm} \sigma_m \ .$$

(a) Verwenden Sie diese Algebra, um drei 2×2-Matrizen $\tilde{\gamma}^0, \tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^2$ zu konstruieren, die die Algebra $\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2\tilde{\eta}^{\mu\nu}$ erfüllen, wobei $\tilde{\eta}$ als $\tilde{\eta} \equiv \mathrm{diag}(+1, -1, -1)$ definiert ist.

(b) Sei $\tilde{\gamma}^5$ als $\tilde{\gamma}^5 := i\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2$ definiert. Wie unterscheidet sich das Verhalten von $\tilde{\gamma}^5$ vom γ^5 des vierdimensionalen Normalfalls?

Aufgabe 2: Unterschiedliche Darstellungen der Dirac-Matrizen.
In der Vorlesung wurden die Dirac-Matrizen der „Standard-Darstellung" als

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} , \quad \gamma^k := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

und diejenigen der „Weyl-Darstellung" als

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^k := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

definiert.

(a) Verwenden Sie die Algebra der Pauli-Matrizen aus Aufgabe 1 um zu verifizieren, dass die Matrizen der Standard-Darstellung die Clifford-Algebra erfüllen.

(b) Ermitteln Sie eine Similaritätstransformation, die die zwei Darstellungen ineinander umwandeln läßt. [Hinweis: Diagonalisieren Sie die γ^0 der Weyl-Darstellung.]

Aufgabe 3: Geschwindigkeitsoperator.
Im Heisenberg-Bild kann ein „Geschwindigkeitsoperator" als $\mathrm{d}\hat{\vec{x}}_H(t)/\mathrm{d}t$ definiert werden. Ermitteln Sie $\mathrm{d}\hat{\vec{x}}_H(t)/\mathrm{d}t$ für den nichtrelativistischen Einteilchen-Hamilton-Operator

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{x}})$$

sowie für den Dirac-Hamilton-Operator

$$\hat{H}_0 = c\,\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + mc^2\beta \ ,$$

wobei $\alpha_k := \gamma^0\gamma^k$ und $\beta := \gamma^0$ 4×4-Matrizen sind.

Das war's!