Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 13**	26.01.2011

Aufgabe 1: Induzierte Emission und Absorption.
In der Vorlesung wurde eine „Zerfallsrate" für die spontane Emission eines Photons aus einem angeregten Zustand hergeleitet (in der Dipolnäherung):

$$\langle \Gamma_{\rm fi} \rangle = \frac{4\alpha_{\rm em}\omega_{\vec{k}}^3}{3\,c^2 g_i} \sum_{m_i,m_f} |\langle f_A; m_f | \hat{\vec{x}}\, | i_A; m_i \rangle|^2 \; .$$

Wie ändert sich das Ergebnis im Falle

(a) einer induzierten Emission, d.h. es gibt $n_{\vec{k}}$ Photonen im Anfangszustand, $n_{\vec{k}} + 1$ im Endzustand? (Die Besetzungszahl sei unabhängig von der Polarisationszustand.)

(b) einer induzierten Absorption, d.h. es gibt $n_{\vec{k}}$ Photonen im Anfangszustand, $n_{\vec{k}} - 1$ im Endzustand, und das Atom wird durch Absorption angeregt?

Aufgabe 2: Strahlung im Gleichgewicht.
Betrachtet wird ein System mit (im Durchschnitt) $N_a = g_a\, e^{-E_a/k_{\rm B}T}$ Atomen im Zustand a (Entartung g_a; Energie E_a), $N_b = g_b\, e^{-E_b/k_{\rm B}T}$ Atomen im Zustand b (Entartung g_b; Energie E_b), sowie $n_{\vec{k}}$ Photonen, mit Energie $E_\gamma = \hbar\omega_{\vec{k}} = E_b - E_a$. Die Prozesse

$$b \leftrightarrow a + \gamma$$

seien im thermischen Gleichgewicht; dies bedeute, dass

$$N_a \,\langle \Gamma_{b \leftarrow a+\gamma} \rangle = N_b \,\langle \Gamma_{b \to a+\gamma} \rangle$$

gilt. Verwenden Sie diesen Ansatz, zusammen mit den Antworten von Aufgabe 1, um die Form der Bose-Einstein-Verteilungsfunktion „herzuleiten". [Antwort: $n_{\vec{k}} = \dfrac{1}{e^{\hbar\omega_{\vec{k}}/k_{\rm B}T} - 1}$.]

Aufgabe 3: Gesamtladung eines komplexen Klein-Gordon-Feldes.
In der Vorlesung wurde eine „Dichte" für ein komplexes Klein-Gordon-Feld definiert,

$$\rho := \frac{i\hbar}{2mc^2}(\phi^* \partial_t \phi - \phi\, \partial_t \phi^*) \; .$$

(a) Seien jetzt ϕ, ϕ^* durch die Feldoperatoren $\hat{\phi}_I, \hat{\phi}_I^\dagger$ ersetzt, wobei

$$\hat{\phi}_I(\vec{x}, t) = \int \frac{{\rm d}^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}_{\vec{k}}\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger\, e^{i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) ,$$

und $[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = [\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q})$, $[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger] = 0$, usw. Ermitteln Sie $\hat{Q} := \int_V {\rm d}^3\vec{x}\, \hat{\rho}$ als Funktional von $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}, \hat{b}^\dagger$, und schlagen Sie folglich eine physikalische Interpretation der Ladung $\hat{Q}$ sowie der von $\hat{a}^\dagger$, $\hat{b}^\dagger$ erzeugten Teilchen vor.

(b) Bestimmen Sie auch den „gleichzeitigen" Kommutator $\frac{1}{c^2}[\hat{\phi}_I(\vec{x}, t), \partial_t \hat{\phi}_I^\dagger(\vec{y}, t)]$.