Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 12**	19.01.2011

Aufgabe 1: Vollständigkeit der Polarisationsvektoren.
Verifizieren Sie die Gültigkeit (in der „Strahlungseichung“) der Beziehung

$$\sum_\lambda e^m_{\vec{k},\lambda} e^{n*}_{\vec{k},\lambda} = \delta^{mn} - \frac{k^m k^n}{\vec{k}^2} \,,$$

wobei $m, n \in \{1, 2, 3\}$ normale Vektorindizes sind, indem Sie:

(a) die Richtung von $\vec{k}$ als z-Achse wählen und eine „linear polarisierte“ Basis betrachten, d.h. $\vec{e}_{\vec{k},1} := \vec{e}_x$, $\vec{e}_{\vec{k},2} := \vec{e}_y$.

(b) die Richtung von $\vec{k}$ als z-Achse wählen und eine „zirkular polarisierte“ Basis betrachten, d.h. $\vec{e}_{\vec{k},+} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\,\vec{e}_y)$, $\vec{e}_{\vec{k},-} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\,\vec{e}_y)$.

(c) aus den Definitionen $\vec{k}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda} = 0$, $\vec{e}_{\vec{k},\lambda}\cdot\vec{e}^{\,*}_{\vec{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}$ sowie den allgemeinen Eigenschaften des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ heraus argumentieren. [Hier können Sie $\vec{e}_{\vec{k},\lambda}$ als reell betrachten.]

Aufgabe 2: Impulsoperator in Fock-Raum-Notation.
Die (klassische) Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes lautet

$$\vec{g}_{\rm em} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c} \,,$$

und der Gesamtimpuls beträgt $\vec{p}_{\rm em} = \int_V {\rm d}^3\vec{x}\,\vec{g}_{\rm em}$. Die kanonisch quantisierten Operatoren sind

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{E}}(\vec{x}) &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar}{(2\pi)^3}} \int \frac{{\rm d}^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_\lambda i\,\omega_{\vec{k}} \Big(\vec{e}_{\vec{k},\lambda}\,\hat{a}_{\vec{k},\lambda}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \text{H.c.} \Big) \,, \\
\hat{\vec{B}}(\vec{x}) &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar}{(2\pi)^3}} \int \frac{{\rm d}^3\vec{q}}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \sum_{\lambda'} i\,c\,\vec{q}\times \Big(\vec{e}_{\vec{q},\lambda'}\,\hat{a}_{\vec{q},\lambda'}\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} - \text{H.c.} \Big) \,.
\end{aligned}$$

Setzen Sie $\hat{\vec{E}}, \hat{\vec{B}}$ im Ausdruck von $\vec{p}_{\rm em}$ ein und bestimmen Sie dadurch $\hat{\vec{p}}_{\rm em}$. [Den Vakuumteil dürfen Sie vernachlässigen.]

Aufgabe 3: Vertauschung von Impulsoperator mit Feldoperator.
Betrachtet werden die Fock-Raum-Operatoren

$$\hat{H}_{\rm em} = \int {\rm d}^3\vec{k} \sum_\lambda \hbar\omega_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\hat{a}_{\vec{k},\lambda} \,, \quad \hat{\vec{p}}_{\rm em} = \int {\rm d}^3\vec{k} \sum_\lambda \hbar\vec{k}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$$

sowie der Feldoperator (in der Strahlungseichung)

$$\hat{\vec{A}}_I(\vec{x},t) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar}{(2\pi)^3}} \int \frac{{\rm d}^3\vec{q}}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \sum_{\lambda'} c \Big(\vec{e}_{\vec{q},\lambda'}\,\hat{a}_{\vec{q},\lambda'}\,e^{-i\omega_{\vec{q}}t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} + \text{H.c.} \Big) \,.$$

Verifizieren Sie die Gültigkeit folgender Beziehungen:

$$i\hbar\partial_t \hat{\vec{A}}_I(\vec{x},t) = [\hat{\vec{A}}_I(\vec{x},t), \hat{H}_{\rm em}] \,; \quad -i\hbar\partial_j \hat{\vec{A}}_I(\vec{x},t) = [\hat{\vec{A}}_I(\vec{x},t), \hat{p}_{{\rm em},j}] \,, \quad j = 1,2,3 \,.$$