Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 11**	12.01.2011

Aufgabe 1: Vertauschungsrelationen für Feldoperatoren.
Ausgehend von $[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{q}}] = [\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}] = 0$, $[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q})$ sowie den Basistransformationen

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}}\, \hat{a}_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \ , \quad \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \ ,$$

verifizieren Sie die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{y})] = [\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}), \hat{\phi}^\dagger(\vec{y})] = 0 \ , \quad [\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}^\dagger(\vec{y})] = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \ .$$

Ändert sich die Lage wenn $[\hat{\phi}_I(\vec{x}, t), \hat{\phi}^\dagger_I(\vec{y}, t')]$ berechnet wird?

Aufgabe 2: Zweiteilchenstreuung in Fock-Raum-Notation.
Sei $\hat{V}_{\alpha\beta}$ ein Zweiteilchenpotential (z.B. Coulomb-Wechselwirkung, d.h. $\hat{V}_{\alpha\beta} = e^2/|\hat{\vec{x}}_\alpha - \hat{\vec{x}}_\beta|$) und V_{jklm} die Amplitude dafür, dass Teilchen α im Zustand l und Teilchen β im Zustand m aneinander streuen, so dass am Ende Teilchen α sich im Zustand j und Teilchen β sich im Zustand k befindet: $V_{jk;lm} := \langle \alpha, j; \beta, k | \hat{V}_{\alpha\beta} | \alpha, l; \beta, m \rangle$. Wegen der Symmetrie $\hat{V}_{\alpha\beta} = \hat{V}_{\beta\alpha}$ gilt $V_{jk;lm} = V_{kj;ml}$. Der Fock-Raum-Hamilton-Operator enthält $\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m} \hat{a}^\dagger_j \hat{a}^\dagger_k V_{jk;lm} \hat{a}_m \hat{a}_l$.

(a) Der Anfangszustand enthält ein Teilchen im Zustand 1, d.h. $|i\rangle := \hat{a}^\dagger_1 |0\rangle$, der Endzustand ein Teilchen im Zustand 2, d.h. $|f\rangle := \hat{a}^\dagger_2 |0\rangle$. Zeigen Sie, dass $\langle f | \hat{V} | i \rangle$ verschwindet.

(b) Seien jetzt zwei Teilchen am Anfang und Ende: $|i\rangle := \hat{a}^\dagger_1 \hat{a}^\dagger_2 |0\rangle$, $|f\rangle := \hat{a}^\dagger_3 \hat{a}^\dagger_4 |0\rangle$. Bestimmen Sie die Amplitude $\langle f | \hat{V} | i \rangle$. [Antwort: $V_{34;12} + V_{43;12}$.]

(c) In der „normalen" Quantenmechanik müssen Mehrteilchenzustände explizit symmetrisiert werden; z.B. wäre $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1;2,2\rangle + |2,1;1,2\rangle)$. Verifizieren Sie, dass dieselbe Amplitude wie im Punkt (b) sich auf diese Weise wiederherstellen läßt.

Aufgabe 3: Gross-Pitaevskii-Gleichung für Bose-Einstein-Kondensate.
Betrachtet wird ein Zweiteilchenpotential (eine „Kontaktwechselwirkung")

$$\hat{V}_{\alpha\beta} := \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\, \delta^{(3)}(\hat{\vec{x}}_\alpha - \hat{\vec{x}}_\beta) \ , \quad \alpha, \beta \in \{1, ..., N\} \ ,$$

wobei a die Streulänge bezeichnet. [Check: Seite 20 mit $m \to \mu \equiv \frac{m}{2}$: $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu^2}{(2\pi)^2 \hbar^4} | \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} V(\vec{x})|^2 = a^2$ OK!]

(a) Zeigen Sie, dass der entsprechende Operator $\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \hat{V}_{\alpha\beta}$ im Fock-Raum als

$$\hat{V} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}) \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}) \left(\frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \right) \hat{\phi}(\vec{x}) \hat{\phi}(\vec{x})$$

dargestellt werden kann. [Hinweis: Verwenden Sie die Formel aus Aufgabe 2.]

(b) Zeigen Sie, falls auch ein normales Einteilchenpotential $V(\vec{x})$ vorhanden ist, dass die heisenbergsche Bewegungsgleichung für den Feldoperator $\hat{\phi}_H(\vec{x}, t)$ die Form der „Gross-Pitaevskii-Gleichung" übernimmt [Hinweis: Schwabl, Kap. 1.5.3.]:

$$i\hbar\, \partial_t \hat{\phi}_H(\vec{x}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{x}) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \hat{\phi}^\dagger_H(\vec{x}, t) \hat{\phi}_H(\vec{x}, t) \right\} \hat{\phi}_H(\vec{x}, t) \ .$$