| Übungen zu Quantenmechanik II | **Blatt Nr. 10** | 22.12.2010 |
|---|---|---|

**Aufgabe 1: Normalkoordinaten.**
Betrachtet wird ein System von vier harmonischen Oszillatoren, mit dem Potential

$$V(q_1, q_2, q_3, q_4) := \frac{1}{2}\,\omega^2\Big[(q_1 - q_4)^2 + (q_4 - q_3)^2 + (q_3 - q_2)^2 + (q_2 - q_1)^2\Big]$$

und der Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} \dot{q}_j^2 - V(q_1, q_2, q_3, q_4)$ .

(a) Bestimmen Sie die Kreisfrequenzen der unabhängigen „Normalschwingungen".
[Antwort: $\{0, \sqrt{2}\omega, \sqrt{2}\omega, 2\omega\}$.]

(b) Skizzieren Sie die Normalschwingungen in den ursprünglichen Koordinaten.

(c) Ermitteln Sie eine „graphische" Erklärung dafür, dass der schnellste Schwingungsmodus (mit Kreisfrequenz $2\omega$) nur für gerades $N$ auftaucht.

**Aufgabe 2: Summenregel für Normalfrequenzen $\omega_k$.**
Ein System bestehe aus $N$ „periodisch" gekoppelten harmonischen Oszillatoren, mit Potential

$$V := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\Big[\omega_0^2 q_j^2 + \omega^2(q_{j+1} - q_j)^2\Big]_{q_{N+1}:=q_1} .$$

(a) Zeigen Sie, dass die „Summenregel" $\sum_{k=1}^{N}\omega_k^2 = \mathrm{Sp}(M)$ gilt, wobei das Potential als „quadratische Form" ausgedrückt wurde, d.h. $V = \frac{1}{2}\,q^T M\, q$. Zeigen Sie auch, dass dieses im jetzigen Fall zur $\sum_{k=1}^{N}\omega_k^2 = N\,(\omega_0^2 + 2\omega^2)$ führt.

(b) In der Vorlesung wurden die Normalfrequenzen $\omega_k^2 = \omega_0^2 + \Big(2\omega\sin\frac{\pi k}{N}\Big)^2$ hergeleitet. Verifizieren Sie, dass diese die Summenregel erfüllen.

(c) Die „letzte" Feder sei abgeschnitten, d.h. $q_1$ und $q_N$ abgekoppelt; das System ist dann keine Kette mehr sondern ein eindimensionaler „Kristall". Bestimmen Sie $\sum_{k=1}^{N}\omega_k^2$ in diesem Fall. [Antwort: $N\,\omega_0^2 + 2(N-1)\,\omega^2$.]

**Aufgabe 3: Brillouin-Zone und Dispersion.**
Bei der Betrachtung eines unendlich ausgedehnten Kristalls mit Gitterkonstanten $a$ wird die folgende Dispersionsrelation (Beziehung zwischen Kreisfrequenz und Wellenvektor) gefunden:

$$\omega^2(\vec{k}) = \omega_0^2 + c^2\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{2}{a}\sin\frac{ak_j}{2}\right)^2 , \quad k_j \in \left(0, \frac{2\pi}{a}\right] , \quad j = 1, 2, 3 .$$

(a) Zeigen Sie, dass der Definitionsbereich des Wellenvektors (d.h. die Brillouin-Zone) ebenfalls als $k_j \in \left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$, $j = 1, 2, 3$ gewählt werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen keine Isotropie (Drehsymmetrie) der Wellenlösungen vorhanden ist (d.h. $\omega^2(\vec{k}) \neq \omega^2(R\,\vec{k})$). Im welchen Limes wird sie wiedergefunden?

(c) Die „Gruppengeschwindigkeit" einer Welle wird als $v_g := \partial\omega(\vec{k})/\partial|\vec{k}|$ definiert. Im welchen Bereich liegen die möglichen Werte von $v_g$? [Antwort: $0 \le |v_g| \le c$.] [Bemerkung: Dass $v_g$ vom $\vec{k}$ abhängig ist, impliziert die Existenz von „Dispersion".]