Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 9**	15.12.2010

Aufgabe 1: Euklidische Greensche Funktion.
In der Vorlesung wurde ein weiterer „euklidischer“ Propagator, $D_E(\tau,\tau') := A^{-1}(\tau,\tau')$, als Lösung der folgenden Differenzialgleichung definiert:

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}+\omega^2\right)D_E(\tau,\tau') = \frac{\hbar}{m}\delta(\tau-\tau' \,\mathsf{mod}\, \beta\hbar) \ .$$

Dabei ist ω^2 der gewöhnliche Parameter des harmonischen Oszillators.

(a) Bestimmen Sie $D_E(\tau,0)$ für $0 \le \tau \le \beta\hbar$.
[Hinweis: Lösen Sie zuerst die Differenzialgleichung bei $0 < \tau < \beta\hbar$. Die Lösung enthält zwei Konstanten. Diese können u.a. aus der Periodizität $D_E(0^+,0) = D_E(\beta\hbar^-,0)$ und aus der in der Vorlesung hergeleiteten Randbedingung $D_E(0^+,0) = A^{-1}(\tau,\tau) = \frac{\hbar}{2m\omega}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2}$ bestimmt werden.] [Antwort: $D_E(\tau,0) = \frac{\hbar}{2m\omega}\frac{\cosh(\frac{\beta\hbar}{2}-\tau)\omega}{\sinh\frac{\beta\hbar\omega}{2}}$.]

(b) Vergleichen Sie das Ergebnis mit einer direkten Berechnung von

$$G_E(\tau,0) := \frac{\mathrm{Sp}[e^{-\beta\hat{H}}\hat{x}(\tau)\hat{x}(0)]}{\mathrm{Sp}[e^{-\beta\hat{H}}]} \ , \quad 0 < \tau < \beta\hbar \ ,$$

wobei $\hat{x}(\tau) := e^{\frac{\tau\hat{H}}{\hbar}}\,\hat{x}\,e^{-\frac{\tau\hat{H}}{\hbar}}$ einen Heisenberg-Operator mit $it \to \tau$ bezeichnet und $1/\,\mathrm{Sp}[e^{-\beta\hat{H}}] = 2\sinh(\beta\hbar\omega/2)$. [Hinweis: $\langle n|\hat{x}|n'\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n'}\,\delta_{n,n'-1} + \sqrt{n}\,\delta_{n,n'+1})$.]

Aufgabe 2: Sattelpunktnäherung.
Verwenden Sie die Sattelpunktnäherung, um die Stirling-Formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left[1+\frac{1}{12n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

herzuleiten. [Hinweis: $n! = \int_0^\infty \mathrm{d}z\, z^n e^{-z} = \int_0^\infty \mathrm{d}z\, e^{-z+n\ln z}$.]

Aufgabe 3: „Instanton“-Lösung.
Sei $V(x) \ge 0$ ein nichtnegatives glattes Potential, und $\bar{x}(\tau)$ eine Lösung der euklidischen Bewegungsgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2\bar{x}}{\mathrm{d}\tau^2} = V'(\bar{x}) \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\bar{x}$ die Gleichung $\frac{m}{2}(\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\tau})^2 - V(\bar{x}) = -E = \mathrm{const}$ erfüllt, wobei E im Falle einer periodischen Bewegung positiv ist, $E > 0$.

(b) Ermitteln Sie die Periode $P(E)$ als Funktion von E. [Antwort: $P = 2\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2}\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\sqrt{2[V(\bar{x})-E]/m}}$, wobei $\bar{x}_i$, $i = 1,2$, die Umkehrpunkte sind (d.h. $V(\bar{x}_i) = E$).]

(c) Ermitteln Sie die klassische Wirkung $\bar{S}_E$. [$\bar{S}_E = 2\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2}\mathrm{d}\bar{x}\sqrt{2m[V(\bar{x})-E]} + \hbar\beta E$.]

(d) Sei jetzt $V(x) := \lambda(x^2-a^2)^2$. Zeigen Sie, dass $P(E) \to \infty$ für $E \to 0^+$.

(e) Zeigen Sie, dass $\bar{x}(\tau) := a\tanh(\omega(\tau_0-\tau)/2)$, mit $m\omega^2 := 8\lambda a^2$, im Limes $0 \ll \tau_0 \ll \beta\hbar$ eine „halbe“ Lösung ist, d.h. der Differenzialgleichung exakt und den Randbedingungen $\bar{x}(0) = +a$, $\bar{x}(\beta\hbar) = -a$ mit exponentiell kleinen Fehlern genügt.