Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 8**	08.12.2010

Aufgabe 1: Wellenfunktionen aus dem Propagator.
Wie in Aufgabe 7.3 wird der Propagator eines harmonischen Oszillators betrachtet:

$$K(y,t;x,0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega t)}}\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin(\omega t)}\Big[(x^2+y^2)\cos(\omega t) - 2xy\Big]\right\} .$$

Verwenden Sie diesen Ausdruck, um die Wellenfunktionen der beiden niedrigsten Zustände zu bestimmen. [Antwort: $|\psi_0| = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$, $\quad |\psi_1| = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2m\omega x^2}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$.]

Aufgabe 2: Pfadintegral im äußeren Feld.
Laut Vorlesung (Kapitel 1.3) hat die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens im äußeren Feld die Form

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t') = \frac{m\,\dot{\vec{x}}^{\,2}}{2} + \frac{q}{c}\,\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x},t') - q\,\phi(\vec{x},t') .$$

Die Pfadintegraldarstellung des Propagators K enthält die Amplitude $\exp(\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t'\,L)$.

(a) Zeigen Sie anhand gegebener Aussagen, dass die Wellenfunktion in einer Eichtransformation $\vec{A}\to\vec{A}' = \vec{A}+\nabla\chi$, $\phi\to\phi' = \phi - \frac{\dot{\chi}}{c}$ sich als $\psi\to\psi' = \exp(\frac{iq\chi}{\hbar c})\psi$ verändert.

(b) Ermitteln Sie die Lagrange-Funktion im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$, wenn die Eichung aus Aufgabe 5.2 benutzt wird. [Antwort: $L = \frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{2} + \frac{qB(x\,\dot{y}-y\,\dot{x})}{2c}$.]

[Bemerkung: Der entsprechende Propagator ließe sich explizit bestimmen; das Ergebnis kann in Gleichung (3-64) von Feynman-Hibbs gefunden werden.]

Aufgabe 3: Eigenschaften des Vakuums aus der Zustandssumme.
Sei E_0 die Energie des Grundzustandes, und $\mathcal{Z} := \mathrm{Sp}(e^{-\beta\hat{H}})$ die Zustandssumme.

(a) Zeigen Sie, dass die Grundzustandsenergie als $E_0 = -\lim\limits_{\beta\to\infty}\dfrac{\ln\mathcal{Z}}{\beta}$ bestimmt werden kann.

(b) Verifizieren Sie die Richtigkeit der Aussage $\langle 0|\hat{A}|0\rangle = \lim\limits_{\beta\to\infty}\dfrac{\mathrm{Sp}(\hat{A}\,e^{-\beta\hat{H}})}{\mathcal{Z}}$.

(c) Sei $\hat{H}$ in der Rolle des Operators $\hat{A}$. Zeigen Sie, dass dieses zur $\langle 0|\hat{H}|0\rangle = -\lim\limits_{\beta\to\infty}\dfrac{\mathrm{d}\ln\mathcal{Z}}{\mathrm{d}\beta}$ führt. Inwieweit stimmt das Ergebnis mit Punkt (a) überein?

Aufgabe 4: Unterschiedliche Greensche Funktionen.
Betrachtet werden zwei Greensche Funktionen („retardiert“ bzw. „zeitgeordnet“):

$$D_R(t,t') := \frac{\hbar}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi}\frac{e^{-i\nu(t-t')}}{\omega^2-(\nu+i0^+)^2} , \quad D_T(t,t') := \frac{\hbar}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi}\frac{e^{-i\nu(t-t')}}{\omega^2-\nu^2-i0^+} .$$

(a) Zeigen Sie, dass die beiden die Differenzialgleichung $(\partial_t^2+\omega^2)D = \frac{\hbar}{m}\delta(t-t')$ erfüllen.

(b) Ermitteln Sie die expliziten Ausdrücke von D_R und D_T, und verifizieren Sie, dass ihr Unterschied der homogenen Gleichung $(\partial_t^2+\omega^2)(D_T-D_R) = 0$ genügt.
[Antwort: $D_R = \frac{\hbar\theta(t-t')\sin\omega(t-t')}{m\omega}$, $D_T = \frac{i\hbar e^{-i\omega|t-t'|}}{2m\omega}$.]