Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 7**	01.12.2010

Aufgabe 1: Propagator eines freien Teilchens.
In der Vorlesung wurde das folgende Ergebnis für den Propagator eines freien Teilchens (in einer Dimension) gefunden:

$$K(y,t;x,0) := \langle y|e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}|x\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\exp\left\{\frac{im(y-x)^2}{2\hbar t}\right\}.$$

Verifizieren Sie anhand des expliziten Ausdrucks, dass K die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) „Anfangsbedingung“: $\lim_{t\to 0^+} K(y,t;x,0) = \delta(y-x)$.

(b) „Bewegungsgleichung“: K erfüllt die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung bzgl. t, y.

(c) „Zerlegung“: $K(y,t;x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, K(y,t;z,t_1)K(z,t_1;x,0)$, $\quad 0 < t_1 < t$.

(d) „Zeitumkehr“ bzw. „Inverse“:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, \tilde{K}(y,0;z,t_1)K(z,t_1;x,0) = \delta(y-x) ,$$

d.h. $\tilde{K}(y,0;z,t_1) := K^*(z,t_1;y,0)$ beschreibt eine Bewegung „rückwärts in Zeit“.

Aufgabe 2: Ein Teilchen im homogenen Kraftfeld.
Betrachtet wird ein System mit konstanter Kraft, z.B. Schwerkraft; das Potential sei $V(x) = -Fx$. Zum Zeitpunkt 0 befinde sich ein Teilchen beim Ort x, zum Zeitpunkt t beim y.

(a) Bestimmen Sie die klassische Bahnkurve x_{cl} sowie die entsprechende Wirkung $S[x_{\text{cl}}]$.

(b) Bestimmen Sie den quantenmechanischen Propagator $K(y,t;x,0)$.

[Antwort: $K = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(y-x)^2}{2t} + \frac{F(y+x)t}{2} - \frac{F^2t^3}{24m}\right]\right\}$.]

Aufgabe 3: Energiespektrum aus dem Propagator.
In der Vorlesung wurde das folgende Ergebnis für den Propagator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators gefunden:

$$K(y,t;x,0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega t)}}\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin(\omega t)}\Big[(x^2+y^2)\cos(\omega t) - 2xy\Big]\right\}.$$

(a) Verwenden Sie $K(y,t;x,0)$, um $\mathrm{Sp}(e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}})$ zu bestimmen. [Hinweis: Berechnen Sie die Spur in der $|x\rangle$-Basis.] [Antwort: $\mathrm{Sp}(e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}) = \frac{1}{2i\sin(\omega t/2)}$.]

(b) Extrahieren Sie aus der Antwort der Aufgabe (a) die Energie-Eigenwerte des Systems. [Hinweis: Drücken Sie diesmal die Spur in der Energie-Eigenbasis aus.]

Zusatzaufgabe: Gaußsches Integral. Begründen Sie sorgfältig die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_N\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} x_iA_{ij}x_j - \sum_{i=1}^{N} b_ix_i\right\} = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} b_i(A^{-1})_{ij}b_j\right\}.$$