Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 6**	24.11.2010

Aufgabe 1: Supraleitender Wirbel (erste Skizze).
Ein Magnetfeld sei auf der z-Achse lokalisiert:

$$\vec{B} := \Phi_B \, \delta(x) \, \delta(y) \, \vec{e}_z \ ,$$

wobei $\Phi_B = \int \mathrm{d}^2\vec{x} \cdot \vec{B}$ den magnetischen Fluß durch die (x, y)-Ebene bezeichnet. Der Fluß sei von der „Materie" um den Wirbel erzeugt worden, d.h. ohne externe Kraft oder Strom.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{B}$ bei $\rho > 0$ durch das Vektorpotential $\vec{A} = \frac{\Phi_B}{2\pi} \nabla\varphi$ dargestellt werden kann, wobei ρ und φ die bekannten Zylinderkoordinaten bezeichnen.

(b) In einer Transformation ändert sich das Vektorpotential als $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$. Die Wahl $\chi = -\Phi_B \, \varphi/2\pi$ lässt das Vektorpotential und folglich den Fluß verschwinden (diese ist enggenommen keine Eichtransformation, weil auch physikalische Größen geändert werden). Die Wellenfunktion der Materie um den Wirbel ändert sich als $\psi' = \exp(\frac{iq\chi}{\hbar c})\psi$; ψ' entspricht also Wellenfunktion ohne Fluß, ψ Wellenfunktion mit Fluß. Verwenden Sie die Eindeutigkeit beider Wellenfunktionen um zu argumentieren, dass ein „selbstgenerierter" Φ_B in Einheiten von $\Phi_0 = hc/q$ quantisiert ist.

Aufgabe 2: Supraleitender Wirbel (zweite Skizze).

(a) Um das Problem der Aufgabe 1 zu „regularisieren" könnte $\delta(x)\delta(y)$ durch $\theta(\rho_0 - \rho)/\pi\rho_0^2$ ersetzt werden, wobei $\vec{B}$ für $\rho < \rho_0$ konstant sei. Ermitteln Sie $\vec{A}$ für $\forall\rho$ in diesem Fall.

(b) Laut Aufgabe 5.1 beträgt Wahrscheinlichkeitsstrom im äußeren Feld

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left[\psi^* \left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c} \vec{A} \right) \psi \right] \ .$$

Betrachtet wird eine Geometrie wie im Punkt (a), wobei die Lage zylindersymmetrisch ist, und $\vec{B} = \vec{0}$ bei $\rho > \rho_0$. Das System sei im Eigenzustand von $\hat{L}_z$. Zeigen Sie, dass die Komponente $j_\varphi(\rho > \rho_0)$ genau dann verschwindet, wenn $q\Phi_B/hc$ ganzzahlig ist.

Aufgabe 3: Aharonov-Bohm-Effekt.

(a) Wenn ein Vektorpotential existiert, wird der Impulsoperator bekannterweise durch $\hat{\vec{p}}_{\vec{A}} \equiv \hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}$ ersetzt. Ermitteln Sie die Eigenzustände von $\hat{\vec{p}}_{\vec{A}}$ ($\hat{\vec{p}}_{\vec{A}}|\vec{p}\rangle = \vec{p}\,|\vec{p}\rangle$) in der Ortsdarstellung. [Antwort: $\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = C \exp\{\frac{i}{\hbar}[\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{q}{c} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}, t)]\}$.]

(b) Unter welchen Umständen ist $I := \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}, t)$ unabhängig vom Integrationsweg?

(c) Ein Teilchenstrahl streut an einer unendlich langen harten Spule; durch die Spule läuft ein magnetischer Fluß Φ_B. In einer bestimmten Näherung („eikonale" bzw. „semiklassische" bzw „WKB"-Näherung; entspricht dem Limes der geometrischen Optik in der Elektrodynamik) kann die Wellenfunktion hinter der Spule als $\psi = \psi^{(a)} + \psi^{(b)}$ ausgedrückt werden, wobei $\psi^{(a)}$ und $\psi^{(b)}$ Eigenzustände von $\hat{\vec{p}}_{\vec{A}}$ sind und als Wege die kürzesten Wege an beiden Seiten der Spule gewählt werden. Zeigen Sie, dass hinter der Spule eine flußabhängige „Interferenz" beobachtet wird, d.h. $|\psi|^2 \propto 1 + \cos(\varphi_0 + \frac{q\Phi_B}{\hbar c})$.