Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 5**	17.11.2010

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeitsstrom im äußeren Feld.
Zeigen Sie, dass für ein Teilchen der Masse m und Ladung q im elektromagnetischen Feld die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

mit

$$\rho = |\psi|^2 \ , \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left[\psi^* \left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c} \vec{A} \right) \psi \right]$$

gilt. Wie verhalten sich ρ und $\vec{j}$ bei (lokalen) Eichtransformationen?

Aufgabe 2: Landau-Niveaus in Zylinderkoordinaten.
Betrachten Sie geladene Teilchen im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$. Das System wird durch die folgenden Vektor- und Skalarpotentiale beschrieben:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \ , \quad \phi = 0 \ . \tag{1}$$

(a) Ermitteln Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in Zylinderkoordinaten. [Hinweis: Aufgabe 3(a) könnte hilfreich sein.]

(b) Der Drehimpulsoperator in z-Richtung lautet

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \ .$$

Zeigen Sie, dass $\hat{L}_z$ mit $\hat{H}$ vertauscht, und dass deshalb die Energie-Eigenzustände durch die Quantenzahl $m_z \in \mathbb{Z}$, mit $\hat{L}_z |m_z\rangle = \hbar\, m_z |m_z\rangle$, charakterisiert werden können.

(c) Zeigen Sie, dass wenn $\hbar m_z$ groß genug ist, um durch einen „klassischen Drehimpulswert“ ersetzt zu werden, d.h. $\hbar m_z \to m|\vec{v}_\perp| r_B = m r_B^2 \omega_B$, wobei

$$\omega_B := \frac{qB}{mc}$$

die klassische Zyklotronfrequenz bezeichnet, dann ist die Wellenfunktion bei Abstand $\rho \sim r_B$ lokalisiert, wie auch klassisch erwartet. [Hinweis: Idenitifizieren Sie ein „effektives Potential“ in der radialen Schrödinger-Gleichung und minimisieren Sie dieses.]

Aufgabe 3: Zeeman-Effekt.
Wenn ein Teilchen Spin hat, dann ist der Hamilton-Operator im äußeren Feld der Form

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[-i\hbar\nabla - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 + q\phi(\vec{r}, t) - \frac{q\,g}{2mc} \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B} \ , \quad \vec{B} = \text{const} \ ,$$

wobei $\hat{\vec{S}}$ den Spin-Operator und g den „gyromagnetischen Faktor“ bezeichnen.

(a) Verwenden Sie die Eichwahl in Gleichung (1) um den Hamilton-Operator in folgender Form auszudrücken:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{q}{2mc} (\hat{\vec{L}} + g\,\hat{\vec{S}}) \cdot \vec{B} + \frac{q^2 B^2\, \hat{\vec{r}}_\perp^2}{8mc^2} \ .$$

(b) Berechnen Sie den sogenannten Zeeman-Effekt (die Änderung des Energie-Eigenwerts) für ein Elektron mit Wellenfunktion $\psi = e^{-r/a}/\sqrt{\pi a^3}$ und Spineigenwert m_s, zur ersten Ordnung in zeitunabhängiger Störungstheorie. [Hinweis: $\int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{-\alpha r} r^n = n!/\alpha^{n+1}$.]