Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 4**	10.11.2010

Aufgabe 1: Streuphasen für das Yukawa-Potential.

In der Bornschen Näherung wurde für die Streuamplitude $f(\theta, k)$ ($\langle \vec{x}|\tilde{\vec{k}}\rangle \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + f(\theta, k)\frac{e^{ikr}}{r}$) des Yukawa-Potentials ($V(\vec{r}) := \frac{\alpha e^{-\mu r}}{r}$) das folgende Ergebnis gefunden:

$$f(\theta, k) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2[\mu^2 + 2k^2(1 - \cos\theta)]} \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass die entsprechenden Streuphasen im „infraroten Limes“, d.h. $k/\mu \ll 1$, als

$$\delta_l(k) \propto \left(\frac{k}{\mu}\right)^{2l+1}$$

verschwinden. [Hinweis: ein Polynom der Ordnung l in $\cos\theta$ kann als Linearkombination von $P_k(\cos\theta)$, $k \leq l$, ausgedrückt werden.]

(b) Bestimmen Sie die Streulänge $a := -\lim_{k\to 0}[\sin\delta_0(k)/k]$ und zeigen Sie anhand dieses Beispiels, dass a für ein abstoßendes Potential positiv ist, für ein anziehendes negativ.

(c) Vergleichen Sie den Niederenergielimes $\lim_{k\to 0}\sigma = 4\pi a^2$ mit einer expliziten Berechnung (ohne Partialwellenentwicklung) derselben Größe aus $f(\theta, k)$.

Aufgabe 2: s-Wellenstreuung an einer harten Kugel.

Betrachten Sie die s-Wellen ($l = 0$) -Streuung an einer harten Kugel mit Radius R (d.h. $V(r) = \infty,\ r \leq R;\ V(r) = 0,\ r > R$).

(a) Machen Sie den Ansatz

$$\frac{e^{ikr}}{r}e^{2i\delta_0} - \frac{e^{-ikr}}{r}$$

für die Wellenfunktion ausserhalb der Kugel und bestimmen Sie die Streuphase δ_0.

(b) Laut Skript können alle Streuphasen aus der Gleichung

$$\tan\delta_l(k) = \frac{j_l(kR)}{n_l(kR)}$$

bestimmt werden, wobei j_l, n_l sphärische Bessel- und Neumann-Funktionen sind. Skizzieren Sie, am Besten durch eine exakte numerische Lösung, $\sin^2\delta_l(k)$ als Funktion von l für $kR = 1, 5, 10$, und zeigen Sie dadurch, dass nur l-Werte bis $l \sim kR$ wichtig sind, aber dass im Bereich $l < kR$ die $\sin^2\delta_l(k)$ keine monotonen Funktionen von l sind. [Hinweis: in `Mathematica` ist $j_l \leftrightarrow$ `SphericalBesselJ`, $n_l \leftrightarrow$ `SphericalBesselY`.]

Aufgabe 3: Komplex-analytische S-Matrix-Elemente.

Eine analytische Fortsetzung von $S_0(k) = \exp(2i\delta_0(k))$ auf die komplexe k-Ebene sei der Form

$$S_0(k) := \frac{\kappa - i\lambda k}{\kappa + i\lambda k}\ , \quad \kappa\ , \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{R}$ die Unitaritätsbedingung $|S_0(k)| = 1$ erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie die Streulänge a. Welche Beziehung hat diese zur komplex-analytischen Struktur der Funktion $S_0(k)$?