Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 2**	27.10.2010

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator im zeitabhängigen Kraftfeld.

(a) Auf einen 1-dimensionalen harmonischen Oszillator mit Frequenz ω_0 wirke die räumlich homogene zeitabhängige Kraft (nicht das Potential)

$$F(t) = \frac{F_0\,\tau_0^2}{\tau_0^2 + t^2}$$

mit konstanten τ_0 und F_0. Für $t \to -\infty$ sei der Oszillator im Grundzustand $|0\rangle$. Berechnen Sie (zur führenden Ordnung in F_0) die Wahrscheinlichkeit mit der man für $t = +\infty$ den ersten angeregten Zustand $|1\rangle$ vorfindet.
[Hinweis: $\langle n'|\hat{x}|n\rangle = (\hbar/2m\omega_0)^{1/2}(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1})$.]

(b) Wiederholen Sie die Aufgabe für den Fall $F(t) = F_0\,e^{-|t|/\tau_0}$. Unter welchen Umständen scheint „Unitarität" (d.h. Wahrscheinlichkeitserhaltung) verletzt zu sein?

Aufgabe 2: Fermi-Regel mit zeitabhängiger Störung. Der Hamilton-Operator sei der Form

$$\hat{H} := \hat{H}_0 + \hat{V}(t)\ , \quad \hat{V}(t) := \hat{V}\,\theta(t)\sin(\omega t)\ .$$

(a) Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Übergangsrate $W_{\mathsf{fi}}(t)$ zur führenden Ordnung in $\hat{V}$.

(b) Die folgende Formel kann in der Literatur gefunden werden:

$$\Gamma_{\mathsf{fi}} = \lim_{t\to\infty} W_{\mathsf{fi}}(t) = \frac{\pi}{2\hbar}|\langle f_I|\hat{V}|i_I\rangle|^2\Big[\delta(E_{\mathsf{f}} - E_{\mathsf{i}} - \hbar\omega) + \delta(E_{\mathsf{f}} - E_{\mathsf{i}} + \hbar\omega)\Big]\ .$$

Können Sie diese Formel begründen?

(c) Wie verhält sich $W_{\mathsf{fi}}(t)$ in führender Ordnung der Taylor-Entwicklung in kleiner t?

Aufgabe 3: Photoeffekt in Dipolnäherung. In der Vorlesung wurde die folgende Formel für den Absorptionsquerschnitt in ebener Welle (mit Kreisfrequenz ω und Polarisationsvektor $\vec{e}_\lambda$; der Wellenvektor $\vec{k}$ wird in führender Ordnung behandelt, d.h. $\exp(i\vec{k}\cdot\hat{\vec{x}}) \approx \mathbb{1}$) gefunden:

$$\sigma_{\mathsf{fi}}^{\mathsf{abs}} \approx \frac{4\pi^2 q^2}{m^2\omega c}\Big|\langle f_I|\vec{e}_\lambda\cdot\hat{\vec{p}}|i_I\rangle\Big|^2\delta(E_{\mathsf{f}} - E_{\mathsf{i}} - \hbar\omega)\ .$$

Sei $|i_I\rangle$ der Grundzustand eines wasserstoffähnlichen Atoms,

$$\langle\vec{r}\,|i_I\rangle := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{3/2} e^{-Zr/a}\ ,$$

wobei a den Bohrschen Radius bezeichnet, und $|f_I\rangle$ ein Impulszustand in Würfelnormierung,

$$\langle\vec{r}\,|f_I\rangle := \frac{1}{L^{3/2}}e^{i\vec{k}_{\mathsf{f}}\cdot\vec{r}}\ .$$

Bestimmen Sie den differenziellen Absorptionsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma_{\mathsf{fi}}^{\mathsf{abs}}/\mathrm{d}\Omega_{\mathsf{f}}$, indem Sie $\delta(E_{\mathsf{f}} - E_{\mathsf{i}} - \hbar\omega)$ durch die Zustandsdichte $\mathrm{d}N_{\mathsf{f}}/\mathrm{d}E_{\mathsf{f}}$ ersetzen, sowie den Gesamtabsorptionsquerschnitt $\sigma_{\mathsf{fi}}^{\mathsf{abs}} = \int \mathrm{d}\Omega_{\mathsf{f}}\,\mathrm{d}\sigma_{\mathsf{fi}}^{\mathsf{abs}}/\mathrm{d}\Omega_{\mathsf{f}}$. In welche Richtung bewegen sich die meisten befreiten Elektronen?
[Hinweis: $\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}e^{-Zr/a} = \frac{8\pi a^3 Z}{(Z^2+a^2q^2)^2}$.]