Übungen zu Quantenmechanik II	**Blatt Nr. 1**	20.10.2010

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator im Heisenberg-Bild. Betrachtet wird ein eindimensionaler harmonischer Oszillator, mit der Hamilton-Funktion

$$H := \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \ .$$

(a) Ermitteln Sie die Lösung $x(t)$ der klassischen Bewegungsgleichungen mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = p_0/m$.

(b) Betrachten Sie dasselbe System jetzt quantenmechanisch, und zwar im Heisenberg-Bild. Verwenden Sie die entsprechenden Bewegungsgleichungen und die Vertauschungsrelation $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, um $\hat{x}_\mathsf{H}(t)$ zu bestimmen. [Antwort: $\hat{x}_\mathsf{H}(t) = \hat{x}\, \cos\omega_0 t + \frac{\hat{p}}{m\omega_0}\, \sin\omega_0 t$.]

(c) Ermitteln Sie auch den Kommutator $G(t)$ sowie die Fourier-Transformierte $\tilde{G}(\omega)$, wobei

$$G(t) := [\hat{x}_\mathsf{H}(t)\, ,\, \hat{x}_\mathsf{H}(0)]\ , \quad \tilde{G}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{i\omega t}\, G(t)\ .$$

[Antwort: $\tilde{G}(\omega) = \frac{\hbar\pi}{m\omega_0}(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$.]

Aufgabe 2: Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen im Magnetfeld. Ein Spin-$\frac{1}{2}$ befinde sich im homogenen Magnetfeld, dessen Richtung als z-Achse gewählt wird; der Hamilton-Operator ist der Form

$$\hat{H} := \omega_0 \hat{S}_z\ .$$

Bei $t = 0$ wird die y-Komponente S_y gemessen und das Ergebnis $+\hbar/2$ gefunden.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man zum Zeitpunkt t den Messwert $+\hbar/2$ für S_z?

(b) Was ist der Erwartungswert von S_z zum Zeitpunkt t?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man zum Zeitpunkt t den Messwert $+\hbar/2$ für S_x?

(d) Was ist der Erwartungswert von S_x zum Zeitpunkt t?

[Hinweis: Die $\hat{S}_i$ können mittels der Pauli-Matrizen σ_i als $\hat{S}_i = \hbar\sigma_i/2$ dargestellt werden;

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ . \quad]$$

Aufgabe 3: Gekoppeltes Zweizustandsystem. Der Hilbert-Raum eines Systems sei von zwei Zuständen, $|a\rangle$ und $|b\rangle$, aufgespannt ($\langle a|b\rangle = 0$), und der Hamilton-Operator sei der Form

$$\hat{H} := |a\rangle\, \alpha\, \langle a| + |b\rangle\, \beta\, \langle b| + \delta\, (|a\rangle\, \langle b| + |b\rangle\, \langle a|)\ , \quad \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}\ .$$

(a) Bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte des Systems, und skizzieren Sie diese als Funktion von β ($0 < \beta < 2\alpha$) für den Fall $\delta = \alpha/10$.

(b) Sei jetzt $\beta = \alpha$. Das System sei bei $t = 0$ im Zustand $|a\rangle$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird es später im Zustand $|b\rangle$ gefunden?