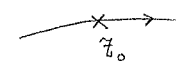
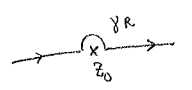
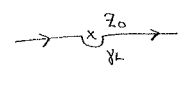



4.6 Kramers-Kronig-Relationen und weitere Beispiele [Anfken 7.2-3]

Was passiert wenn man über einen Pol integriert?
 Das Ergebnis ist ohne weitere Informationen nicht definiert,
 aber mit weiteren Informationen sind sinnvolle Definitionen möglich.



(i) „Rechtswert“ : $\mathcal{R} \int_{\gamma} dz f(z) := \int_{\gamma_R} dz f(z)$  ,
 wobei der Pol rechts liegen bleibt.
 (Laut Residuensatz ist das Ergebnis unabhängig vom Radius des kleinen Bogens.)

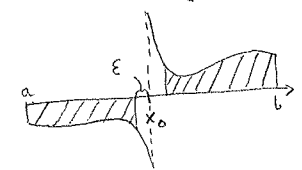
(ii) „Linkswert“ : $\mathcal{L} \int_{\gamma} dz f(z) := \int_{\gamma_L} dz f(z)$  ,
 wobei der Pol links liegen bleibt.

(Bemerkung : Links- und Rechtswert unterscheiden sich um das $2\pi i$ -fache des Residuums bei z_0 :
 $\int_{\gamma_L} dz f(z) - \int_{\gamma_R} dz f(z) = \oint_{\gamma_L - \gamma_R} dz f(z) = 2\pi i \text{Res}_{z_0} f$ 

(iii) „Prinzipalwert“ : $\mathcal{P} \int_{\gamma} dz f(z) := \frac{1}{2} (\mathcal{L} + \mathcal{R}) \int_{\gamma} dz f(z)$.

(iv) „Cauchyscher Hauptwert“: Wenn der Pol von erster Ordnung ist, und wir längs der x-Achse integrieren, definiert man

$$\mathcal{P} \int_a^b dx f(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_a^{x_0 - \epsilon} dx f(x) + \int_{x_0 + \epsilon}^b dx f(x) \right\}$$

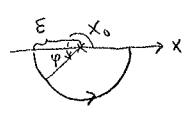


Behauptung: $\mathcal{P} \int_{\gamma} dz f(z) = \mathcal{P} \int_a^b dx f(x)$, falls (iv) definiert.

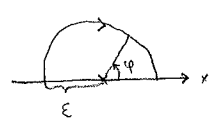
Beweis:

Laut Annahme von (iv) ist $f(z) = \frac{g(z)}{z - x_0}$,
 wobei $g(z)$ analytisch ist.
 Wähle in γ_L und γ_R Bogen mit Radius ϵ .

$z = x_0 + \epsilon e^{i\varphi}$
 $dz = i\epsilon d\varphi e^{i\varphi}$



Beitrag des Bogens von γ_L :
 $\int_{\pi}^{3\pi} i\epsilon d\varphi e^{i\varphi} \left\{ \frac{g(x_0 + \epsilon e^{i\varphi}) - g(x_0)}{\epsilon e^{i\varphi}} + \frac{g(x_0)}{\epsilon e^{i\varphi}} \right\}$
 $= \mathcal{O}(\epsilon) + i\pi g(x_0)$.

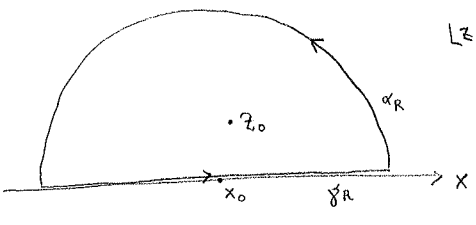


Beitrag des Bogens von γ_R :
 $\int_{\pi}^0 i\epsilon d\varphi e^{i\varphi} \left\{ \frac{g(x_0 + \epsilon e^{i\varphi}) - g(x_0)}{\epsilon e^{i\varphi}} + \frac{g(x_0)}{\epsilon e^{i\varphi}} \right\}$
 $= \mathcal{O}(\epsilon) - i\pi g(x_0)$

\Rightarrow Beitrag von $g(x_0)$ hebt auf $\Rightarrow \epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \square$.

Anwendung:

Sei $f(z)$ analytisch auf der oberen Halbebene sowie auf der reellen Achse, und es gelte $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$.



Cauchy - Formel (Seite 93): $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R + \partial R} dz \frac{f(z)}{z - z_0}$.

Unter der gegebenen Annahme trägt der Hilfsweg bei $R \rightarrow \infty$ nicht bei. Wenn auch $z_0 \rightarrow x_0$, folgt

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{L} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0}$$

Wenn dagegen z_0 unter der reellen Achse ist, gibt es gar keinen Pol, und (vgl. Seite 93):

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{R} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0}$$

Setzt man diese zusammen, erhält man („ $\mathcal{L} + \mathcal{R} = 2P$ “)

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0}$$

Schreibt man noch $f = u + iv$, so folgt*

$$u(x_0) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi} \frac{v(x)}{x - x_0}$$

$$v(x_0) = -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi} \frac{u(x)}{x - x_0}$$

1894-1958
"Kramers-Kronig"
1904-1995

D.h. der Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind nicht unabhängig von einander.

(Dieselbe Tatsache wurde „in Differenzialform“ durch die Cauchy-Riemann-Gleichungen, Seite 73, ausgedrückt.)

In der Physik spielen Kramers-Kronig-Relationen eine wichtige Rolle in der Optik und auch allgemeiner bei „Streuung“:
 $u = \text{Re}(f) \Leftrightarrow$ „Dispersion“
 $v = \text{Im}(f) \Leftrightarrow$ „Absorption“.

* Es geht hier um lineare Integraltransformationen wie im Kapitel 2.3; u und v sind „Hilbert-Transformierten“ voneinander.

Summierung :

Residuensatz kann auch in die „Umgekehrte“ Richtung verwendet werden, Pol \rightarrow Integral.

Beispiel: $G(\tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i 2\pi n \tau}}{(2\pi n)^2 + \beta^2}, \quad 0 < \tau < 1, \beta > 0.$

Betrachte die Hilfsfunktion $\phi(ix) := \frac{1}{e^{ix} - 1}$.

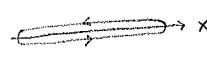
Diese hat Pole bei $e^{ix} = 1$, d.h. $x = 2\pi n =: x_n$.


Residuum bei x_n : $\phi(ix_n + iz) = \frac{1}{e^{ix_n} e^{iz} - 1} = \frac{1}{e^{iz} - 1}$
 $\approx \frac{1}{1 + iz + O(z^2) - 1} \approx \frac{1}{iz} = \frac{-i}{z}$
Res_{x_n} $\phi(ix)$

Sei jetzt $f(z)$ eine analytische Funktion die keine Pole auf der reellen Achse hat. Dann gilt:

$$\oint dz f(z) \phi(iz) = 2\pi i \cdot (-i) \sum_{x_n} f(x_n)$$

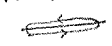
\uparrow Residuum \uparrow Pole von $\phi(iz)$



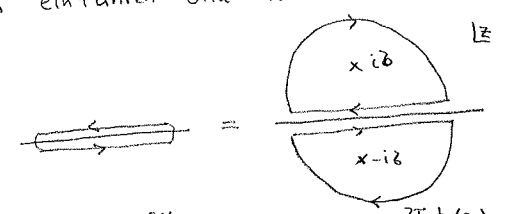
$$\Leftrightarrow \sum_{x_n} f(x_n) = \frac{1}{2\pi} \oint dz f(z) \phi(iz)$$


Wähle jetzt $f(x) := \frac{e^{ix\tau}}{x^2 + \beta^2}, \quad 0 < \tau < 1, \beta > 0.$

Es folgt: $G(\tau) = \sum_{x_n} f(x_n)$
 $= \frac{1}{2\pi} \oint dz \frac{e^{iz\tau}}{z^2 + \beta^2} \phi(iz)$



Wenn $0 < \tau < 1$ ist $e^{iz\tau} \phi(iz)$ klein sowohl in der unteren als auch in der oberen Halbebene. Man kann also große Hilfsbögen einführen und wieder den Residuensatz verwenden:



$$\Leftrightarrow G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -2\pi i \cdot \frac{e^{-2\tau\beta} \phi(-\beta)}{2i\beta} - 2\pi i \cdot \frac{e^{2\tau\beta} \phi(\beta)}{-2i\beta} \right\}$$

$\uparrow z = i\beta$ $\uparrow z = -i\beta$

Bemerke: $\phi(-\beta) = \frac{1}{e^{-\beta} - 1} = \frac{e^\beta}{1 - e^\beta} = -e^\beta \phi(\beta)$.

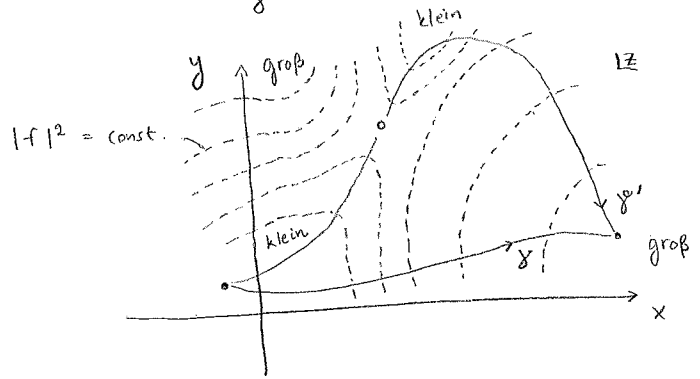
$$\Leftrightarrow G(\tau) = \frac{\phi(\beta)}{2\beta} \left\{ e^{2(1-\tau)\beta} + e^{2\tau\beta} \right\} = \frac{1}{2\beta} \frac{e^{2\beta(1-\tau)} + e^{2\tau\beta}}{e^\beta - 1}$$

Sattelpunktnäherung:

Wenn Pole vorhanden sind, können komplexe Integrale laut Residuensatz exakt „lokalisiert“ werden.

Wenn keine Pole vorhanden sind, ist es trotzdem möglich, dass der Wert eines Integrals näherungsweise durch das Verhalten in der Nähe eines „Sattelpunkts“ bestimmt wird.

Betrachte $I = \int_{\gamma} dz f(z)$; zeichne $|f(z)|^2$:



* Kann als weiteres Korollar der Cauchy-Formel bewiesen werden, vgl. Kap. 4.3.

Es gibt keine Punkte bei denen $|f(z)|^2$ maximal wäre (ohne Beweis*), aber es gibt Extremalstellen:

$$f'(z) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u+iv) = 0 \Rightarrow \partial_x u = \partial_x v = 0$$

$$\Rightarrow \partial_y u = \partial_y v = 0 \Rightarrow \partial_x(u^2+v^2) = \partial_y(u^2+v^2) = 0.$$

Cauchy-Riemann

Überquere einen solchen „Sattelpunkt“ in Talrichtung.

Beispiel:

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^{\infty} dt t^n e^{-t} \quad (\text{vgl. Seite 84})$$

$$= \int_0^{\infty} dt e^{-t+n \ln t}$$

$$\frac{d}{dt}(-t+n \ln t) = -1 + \frac{n}{t} = 0 \Rightarrow t=n$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(-t+n \ln t) = -\frac{n}{t^2} = -\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow -t+n \ln t = -n+n \ln n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot (t-n)^2 + O\left(\frac{1}{n^2}(t-n)^3\right)$$

$$\Rightarrow n! \approx e^{-n+n \ln n} \int_0^{\infty} dt e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}}$$

$$\stackrel{t'=t-n}{=} e^{-n} n^n \int_{-n}^{\infty} dt' e^{-\frac{(t')^2}{2n}}$$

$$\stackrel{n \gg 1}{\approx} e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{„Stirling-Formel“}$$

1622 - 1770