4.5 Residuenkalkül in der Praxis. II [Arfken 7.1]

Es geht weiter mit konkreten Beispielen (vgl. Seiten 97, 98).

(iii) Löse $\boxed{(\partial_x^2 - k^2)\, G(x;y) + \delta(x-y) = 0}$ mit verschwindenden Randbedingungen.

(a) Fourier-transformiere Gleichung und Randbedingungen (vgl. Seite 47), mit der Annahme $G(x;y) =: f(x-y)$ $\left[\text{denn } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial (x-y)}\right]$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-iqx} \, (\partial_x^2 - k^2)\, f(x-y) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-iqx}\, \delta(x-y)$$

wegen Randbedingungen $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = 0$ darf man zweimal partiell integrieren

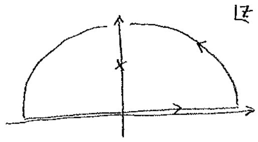
$$\Rightarrow \quad -(q^2+k^2) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-iq(x-y)}\, e^{-iqy}\, f(x-y) = -e^{-iqy}$$

$$\Rightarrow \quad (q^2+k^2)\, \tilde{f}(q) = 1 \qquad \Rightarrow \quad \tilde{f}(q) = \frac{1}{q^2+k^2}.$$

(b) Rücktransformiere:

$$f(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \cdot \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2+k^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \cdot \frac{e^{iq(x-y)}}{(q-ik)(q+ik)}.$$

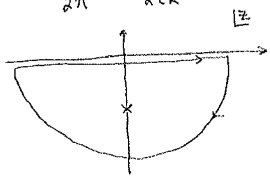
Pole liegen bei $q = \pm ik$. Hilfsweg ist harmlos nur wenn kein exponentielles Wachstum stattfindet.



$q = +ik$

$$\Rightarrow \quad e^{-k(x-y)} \quad \Rightarrow \quad \text{ok für } x>y$$

Genauer: $$f(x-y) \overset{x>y}{=} 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-k(x-y)}}{2ik} = \frac{e^{-k(x-y)}}{2k}$$



$q = -ik$

$$\Rightarrow \quad e^{k(x-y)} \quad \Rightarrow \quad \text{OK für } y>x$$

Genauer: $$f(x-y) \overset{y>x}{=} -2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{k(x-y)}}{-2ik} = \frac{e^{k(x-y)}}{2k}$$

Diese können zusammengesetzt werden:

$$f(x-y) = G(x;y) = \frac{e^{-k|x-y|}}{2k},$$

genau wie in Aufgabe 8.3.

(iv) $\boxed{I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}}$

Pole:

$$z^3 = -1$$

$$z = e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi n}{3}\right)} = \left\{-1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$$

$$z^3+1 = (z+1)\underbrace{(z-e^{i\frac{\pi}{3}})(z-e^{-i\frac{\pi}{3}})}$$

$$z^2 - z\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)+1$$

$$= z^2 - z\cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+1$$

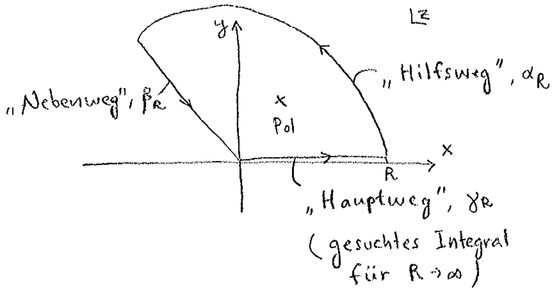
$$= z^2 - z + 1 \qquad \text{ok!}$$

Richtungen mit invariantem Nenner:

$$(e^{i\varphi})^3 = +1$$

$$e^{i\varphi} = e^{i\left(\frac{2\pi n}{3}\right)} = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right\}.$$

Kontur:



Nebenweg soll für $R\to\infty$ ein Vielfaches des gesuchten Integrals liefern:

$$\int_{\beta_R} \frac{dz}{1+z^3} \underset{z = xe^{\frac{2i\pi}{3}}}{=} \int_R^0 \frac{dx\, e^{\frac{2i\pi}{3}}}{1+x^3} = -e^{\frac{2i\pi}{3}} \int_0^R \frac{dx}{1+x^3}.$$

Residuensatz:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R+\alpha_R+\beta_R} \frac{dz}{1+z^3} = \left(1-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) I$$

$$\overset{!}{=} 2\pi i \cdot \left.\frac{1}{(z+1)(z-e^{-i\frac{\pi}{3}})}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

Ergebnis:

$$I = \frac{1}{1-e^{\frac{2i\pi}{3}}} \cdot \frac{2\pi i}{(e^{i\frac{\pi}{3}}+1)(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}})}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-\frac{i\pi}{3}}} \cdot \frac{1}{1+e^{\frac{i\pi}{3}}} \cdot \frac{\pi \cdot 2i}{(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}})}$$

$$= \frac{\pi}{\left(1+2\cos\frac{\pi}{3}+1\right)\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{(1+1+1)\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

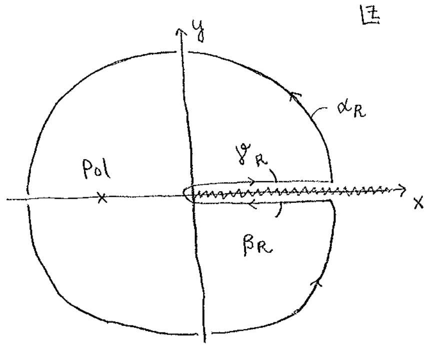
$$= \underline{\underline{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}}.$$

(v) $$\boxed{I = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}}$$

Pol: $z = -1$.

Schlitz: Es lohnt sich, den Schlitz diesmal längs der positiven x-Achse laufen lassen, d.h. $\varphi \in (0, 2\pi)$, so dass Schlitz und Pol nicht überlappen.

Kontur:



Auf β_R: $z = x e^{i2\pi}$; $\sqrt{z} = \sqrt{x} e^{i\pi} = -\sqrt{x}$

$$\Rightarrow \int_{\beta_R} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}} = \int_R^0 \frac{dx}{(1+x)(-\sqrt{x})} = \int_0^R \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Residuensatz: $$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R+\alpha_R+\beta_R} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}} = 2I$$

$$\stackrel{!}{=} 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{e^{i\pi}}} = \frac{2\pi i}{i}$$

Ergebnis: $I = \pi$.

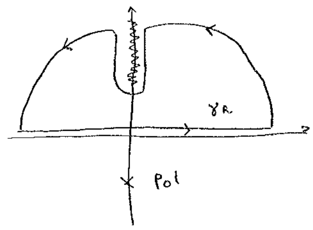
$$\boxed{I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\ln(x-i)}{(x+i)^2}}$$

Die Idee ist wie oben:

Pol: $z = -i$

Schlitz: Fängt bei $z = +i$ an.

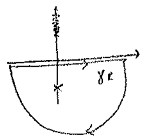
Kontur*:



Ergebnis (Aufgabe 13.2):

$I = \pi$.

* Eine andere Möglichkeit wäre

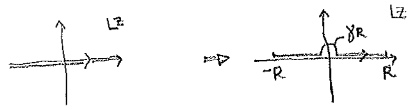


, aber in Aufgabe 13.2 soll man längs des Schlitzes integrieren!

(vi) $$\boxed{I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin x}{x}}$$

Pol: Es gibt keinen – die Singularität ist hebbar (vgl. Seite 99).

Trick 1: Weil es keinen Pol gibt, dürfen wir die Kontur umformen:



Trick 2: $$\int_{\gamma_R} dz \, \frac{\sin z}{z} = \int_{\gamma_R} dz \, \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz}$$

$$= \int_{\gamma_R} dz \, \frac{e^{iz}}{2iz} - \int_{\gamma_R} dz \, \frac{e^{-iz}}{2iz}$$

Wähle Hilfsweg in oberer Halbebene ($e^{i(iy)} = e^{-y}$)

Wähle Hilfsweg in unterer Halbebene ($e^{i(-iy)} = e^{y}$)

Residuensatz: In den einzelnen Integralen gibt es einen Pol, bei $z = 0$!

$$\Rightarrow \quad I = -(-2\pi i) \cdot \frac{1}{2i} = \underline{\underline{\pi}}$$

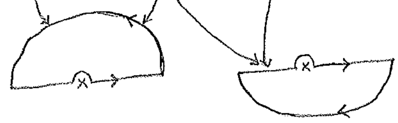
$$\boxed{I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin^2 x}{x^2}}$$

$$= \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} dz \, \frac{1}{-4z^2} \left\{ e^{2iz} - 2 + e^{-2iz} \right\}$$

Hilfsweg oben

egal

Hilfsweg unten



Nur die zweite Kontur liefert einen Beitrag. Um das Residuum zu erkennen, muß man entwickeln:

$$\frac{1}{-4z^2} \left\{ e^{-2iz} \right\} = -\frac{1}{4z^2} + \frac{i}{2z} + \mathcal{O}(1)$$

$$\Rightarrow \quad I = (-2\pi i) \cdot \frac{i}{2} = \underline{\underline{\pi}}.$$

— ∘ —