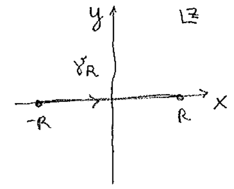
4.4 Residuenkalkül in der Praxis. I [Arfken 7.1]

Um in Gang zu kommen, fangen wir mit zwei Beispielen an; nachher kommt noch ein wenig Theorie dazu.

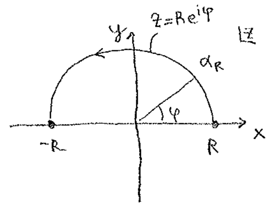
(i) $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

* Schreibe I als $I = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}$.



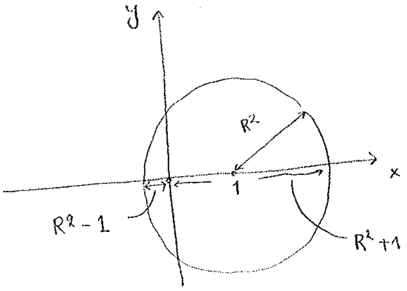
* Es gilt: $z^2+1 = (z-i)(z+i)$; Pole liegen bei $z=\pm i$.

* Um den Residuensatz benutzen zu können, betrachten wir einen „Hilfsweg", α_R. Bei $R\to\infty$ ergibt dieser einen verschwindenden Beitrag, denn



$$\left|\frac{1}{1+z^2}\right|_{\alpha_R} = \sqrt{\left(\frac{1}{1+R^2e^{2i\varphi}}\right)\left(\frac{1}{1+R^2e^{-2i\varphi}}\right)}$$

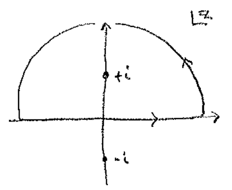
$$= \sqrt{\frac{1}{1+2R^2\cos(2\varphi)+R^4}} \leq \sqrt{\frac{1}{(1-R^2)^2}},$$



und deshalb (vgl. Aufgabe 11.4)

$$\left|\int_{\alpha_R} \frac{dz}{1+z^2}\right| \leq \pi R \cdot \frac{1}{|R^2-1|} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

* Folglich gilt: $I = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R+\alpha_R} \frac{dz}{1+z^2}$



* Jetzt können wir den Residuensatz benutzen. Nur der Pol bei $z=+i$ wird umgelaufen, und zwar in die positive Richtung:

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_{+i}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}_{+i}\left(\frac{1}{(z-i)}\cdot\underbrace{\frac{1}{(z+i)}}_{\text{hier ist „}a_{-1}\text{"}}\right)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \underline{\pi}.$$

* Ein wenig allgemeiner: $(a>0)$

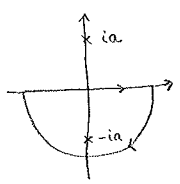
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{+ia} \frac{1}{(z-ia)(z+ia)}$$

$$= \frac{2\pi i}{2ia} = \frac{\pi}{a}$$

$$= -2\pi i \operatorname{Res}_{-ia} \frac{1}{(z-ia)(z+ia)}$$

$$= \frac{-2\pi i}{-2ia} = \frac{\pi}{a}.$$

Hier läuft der Hilfsweg in die negative Richtung:



(ii) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}\,, \quad a > 0.$$

* Der Teil mit dem Hilfsweg bleibt unverändert:

$$\left|\frac{1}{(a^2+R^2e^{2i\varphi})^2}\right| = \left|\frac{1}{a^2+R^2e^{2i\varphi}}\right|^2 \leq \frac{1}{(a^2-R^2)^2}\,,$$

und deshalb $$\lim_{R\to\infty} \pi\cdot R\cdot\left|\frac{1}{(a^2+R^2e^{2i\varphi})^2}\right| = 0.$$

* Bestimmung des Residuums:

$$\frac{1}{(a^2+z^2)^2} = \frac{1}{(z-ia)^2(z+ia)^2}\,.$$

D.h. es gibt Pole bei $z = \pm ia$. Wenn der Hilfsweg in der oberen Halbebene läuft, braucht man nur den Pol bei $z = +ia$ zu berücksichtigen. Um das Residuum zu bestimmen, muss der andere Faktor um diesen Punkt entwickelt werden:

$$g(z) := \frac{1}{(z+ia)^2} = \underbrace{g(ia)}_{\frac{1}{(2ia)^2}} + (z-ia)\underbrace{g'(ia)}_{\frac{-2}{(2ia)^3} = -\frac{i}{4a^3}} + O(z-ia)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a^2+z^2)^2} = \left(-\frac{1}{4a^2}\right)\frac{1}{(z-ia)^2} \underbrace{- \frac{i}{4a^3}}_{\text{Residuum!}}\cdot\frac{1}{z-ia} + O(z-ia)^0$$

* Das Integral laut des Residuensatzes:

$$I = 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4a^3}\right) = \frac{\pi}{2a^3}\,.$$

Die Integration wurde zur Differenzierung reduziert!

* Checken:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \lim_{b\to a}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

$$\overset{\text{Partialbruchzerlegung}}{=} \lim_{b\to a}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right)$$

$$\overset{\text{Seite 97}}{=} \lim_{b\to a}\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{a}-\frac{\pi}{b}\right)$$

$$= \lim_{b\to a}\frac{1}{\cancel{(b-a)}(b+a)}\cdot\frac{\pi\,\cancel{(b-a)}}{ab} = \frac{\pi}{2a^3} \quad \text{ok!}$$

Allgemeines über Pole (vgl. Seite 81)

Eine isolierte Singularität z_0 einer analytischen Funktion $f(z)$ heißt	je nachdem ob der Hauptteil der Laurent-Entwicklung
* hebbar	* Null ist
• Pol	• von der Form $\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$ ist
▪ wesentlich	▪ von der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ ist, mit unendlich vielen nichtverschwindenden Summanden.

* Die hebbaren Singularitäten sind eigentlich gar keine Singularitäten; z.B. $\frac{\sin z}{z}$ ist eine ganze Funktion, mit Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$.

• Bei Polen gilt unbedingt $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \lim_{z\to z_0} \left| \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} \right| = \infty$, oder:

Riemannscher Hebbarkeitssatz: Ist $f(z)$ in einer punktierten Kreisscheibe um eine isolierte Singularität beschränkt, so ist die Singularität hebbar.

Beweis:

$$a_{-N} \overset{\text{Seite 94}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} d\zeta\, f(\zeta)\, (\zeta - z_0)^{N-1}$$

$$\Rightarrow |a_{-N}| \overset{\text{Aufgabe 11.4}}{\leq} \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi}\varepsilon \cdot \varepsilon^{N-1} |f|_{max}$$

$$= \varepsilon^N |f|_{max} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

In der Praxis ist es nützlich zu erkennen, dass falls $g(z)$ und $h(z)$ beide analytisch bei z_0 sind, und $g(z)$ eine k-fache und $h(z)$ eine m-fache Nullstelle dort hat, so hat $\frac{g(z)}{h(z)}$ bei z_0 eine hebbare Singularität falls $k \geq m$, und einen Pol der Ordnung $m-k$ falls $m>k$.

Beispiel: $\sin(z)$ hat bei $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, einfache Nullstellen; $\frac{1}{\sin(z)}$ hat an gleichen Stellen einfache Pole.

▪ In der Nähe von wesentlichen Singularitäten variiert die Funktion gewaltig, so kann nur ein einziger Punkt $w_0 \in \mathbb{C}$ im Bild einer beliebig kleinen punktierten Kreisscheibe um z_0 fehlen, z.B. $w_0 = 0$ bei $e^{1/(z-z_0)}$ („Großer Satz von Picard").
(1856 – 1941)

Residuenbestimmung bei Polen

Sei $f(z)$ der Form $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, wobei g und h analytische Funktionen sind; die möglichen Pole liegen bei Nullstellen von h.

Um das Residuum zu bestimmen, muss man zuerst erkennen, welcher Ordnung der Pol ist.

(i) $h(z)$ hat eine einfache Nullstelle bei $z = z_0$.

$$\Rightarrow \quad h(z) = (z-z_0)h'(z_0) + \mathcal{O}(z-z_0)^2$$
$$= (z-z_0)h'(z_0)\left[1 + \mathcal{O}(z-z_0)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0) + \mathcal{O}(z-z_0)}{(z-z_0)h'(z_0)\left[1+\mathcal{O}(z-z_0)\right]} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{g(z_0)}{h'(z_0)} + \mathcal{O}(z-z_0)^0.$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

(ii) $h(z)$ hat eine k-fache Nullstelle bei $z = z_0$.

$$\Rightarrow \quad h(z) = c\cdot(z-z_0)^k\left[1+\mathcal{O}(z-z_0)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0) + (z-z_0)g'(z_0) + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}(z-z_0)^{k-1}g^{(k-1)}(z_0) + \ldots}{c\,(z-z_0)^k\left[1+\mathcal{O}(z-z_0)\right]}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{c\cdot(k-1)!}$$

(iii) $f(z)$ hat einen Pol höchstens k-ter Ordnung,
d.h. bei $(z-z_0)^k f(z)$ ist die Singularität hebbar.

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad (z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + \ldots + a_{-2}(z-z_0)^{k-2} + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\,\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{(z-z_0)^k f(z)\right\}_{z=z_0}$$

Fazit: Beim Residuenkalkül werden Integrale „lokalisiert": Funktionenwerte und Ableitungen bei Polen bestimmen schon alles.

—— o ——