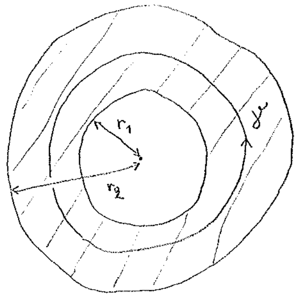
4.2 Cauchyscher Integralsatz, Residuensatz [Arfken 7.1]

Wir haben gesehen, dass wenn γ ganz in einem Gebiet verläuft, in dem f eine Stammfunktion besitzt, so ist $\oint_\gamma dz\, f(z) = 0$ (vgl. Seiten 85, 88).

Man kann aber die Aussagen zu geschlossenen Integrationswegen noch verstärken.



Beispiel: Ist $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ eine für $r_1 < |z| < r_2$ konvergente Laurent-Reihe, und ist $r_1 < r < r_2$, so gilt

$$\oint_{|z|=r} dz\, f(z) = \oint_{|z|=r} dz\, \frac{a_{-1}}{z} = 2\pi i\, a_{-1}.$$

Insbesondere verschwindet das Integral wenn $a_{-1} = 0$; a_{-1} heißt das Residuum der Laurent-Reihe.

Beweis: Integriere gliedweise und benutze (iii), (v) aus Seite 86.

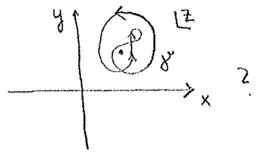
*Um genauer zu sein: eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, denn $\frac{dy}{dt}$ muss (außer Knicke) existieren.

Umlaufszahl: Sei γ eine geschlossene Kurve*, welche nicht durch z_0 geht. Dann heißt die Zahl

$$\nu_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - z_0}$$

die Umlaufszahl um z_0. Sie gibt an, wie oft γ den Punkt z_0 im positiven Sinne umläuft.

Beispiel: $\oint_\gamma \frac{dz}{z(z-(1+i))}$ mit



?

Entwicklung um $z = 1+i$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i+z-(1+i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-(1+i))^n}{(1+i)^{n+1}}.$$

Diese konvergiert bei $|z-(1+i)| < \sqrt{2}$. Es folgt:

$$\frac{1}{z(z-(1+i))} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{z-(1+i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-(1+i))^{n-1}}{(1+i)^{n+1}}.$$

Umlaufszahl: $+2$.

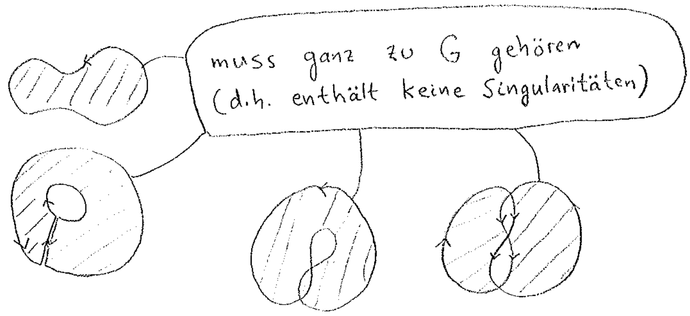
$$\Rightarrow \oint_\gamma \frac{dz}{z(z-(1+i))} = \underset{\uparrow \atop \nu_\gamma(z_0)}{2} \cdot 2\pi i \cdot \underset{\uparrow \atop a_{-1}}{\frac{1}{1+i}} = \frac{4\pi i}{1+i},$$

denn alle anderen Terme besitzen eine Stammfunktion.

Cauchyscher Integralsatz: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ analytisch und γ eine geschlossene Kurve in G, die keinen nicht zu G gehörenden Punkt umläuft, d.h. $\nu_\gamma(p) = 0$ für alle $p \in \mathbb{C} \setminus G$.
Dann gilt $\oint_\gamma dz\, f(z) = 0$.

Bemerkung: Hier gibt es keine Rede über die Stammfunktion oder eine überall in G konvergente Laurent-Reihe; es geht deshalb um eine Verallgemeinerung.

Anschauliche Bedeutung:



Beweis (Skizze): (à la Goursat 1858-1936)

Weil $\int_{-\gamma} dz\, f(z) = -\int_\gamma dz\, f(z)$ gilt (vgl. Seite 88), darf man γ durch ein Netz kleiner Maschen ersetzen:

Innerhalb jeder Masche nutzt man komplexe Differenzierbarkeit:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \mathcal{O}(z-z_0)^2 .$$

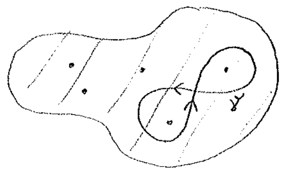
Die Integrale über $f(z_0)$ und $f'(z_0)(z-z_0)$ verschwinden exakt, weil Stammfunktionen existieren.

Der fehlende (und entscheidende) Schritt ist zu zeigen, dass auch die Beiträge der Fehlerterme verschwinden, wenn die Maschen klein genug gemacht werden.

(Intuitiv: Sei ε Kantenlänge bzw. Radius einer Masche.
Anzahl Maschen $\sim \frac{1}{\varepsilon^2}$;
Umfangslänge $\sim \varepsilon$;
Gesamtbeitrag $\sim \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \varepsilon \cdot \mathcal{O}(\varepsilon^2) \sim \mathcal{O}(\varepsilon) \to 0$.)

vgl. Aufgabe 11.4

Der Cauchysche Integralsatz kann nochmal verallgemeinert werden, indem isolierte Pole (vgl. Seite 81) mit einbezogen werden.



Residuensatz: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ analytisch bis auf isolierte Singularitäten, und γ eine geschlossene Kurve in G, die keine der Singularitäten trifft und keinen Punkt außerhalb von G umläuft. Dann gilt

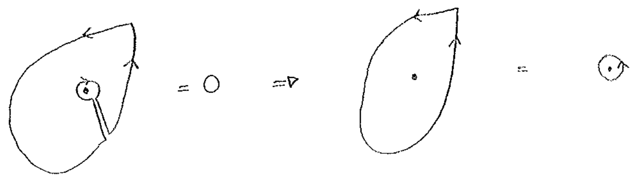
$$\boxed{\oint_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i \sum_{p \in G} \nu_\gamma(p)\, \mathrm{Res}_p f\,,}$$

wobei

$$\mathrm{Res}_p f := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_p|=\varepsilon} dz\, f(z)$$

das Residuum von f am Pol z_p heißt.

Begründung: (i) Benutze den Cauchyschen Integralsatz, um nah an die Singularitäten zu gelangen:



(ii) Mit selbem Argument ist

$$\odot = \oint_{|z-z_p|=\varepsilon} dz\, f(z)$$

unabhängig von $\varepsilon > 0$, und deshalb eine wohlbestimmte komplexe Zahl. Wenn durch $2\pi i$ dividiert wird sie das Residuum genannt.

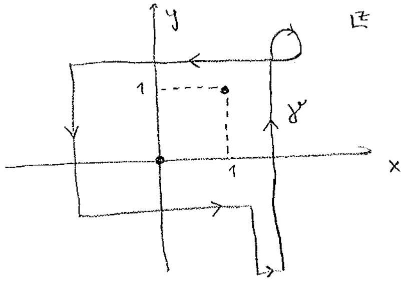
(iii) Wenn ε so klein gewählt wird, dass eine Laurent-Reihe um z_p konvergiert, erhalten wir (vgl. Seiten 80, 89)

$$\mathrm{Res}_p f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_p|=\varepsilon} dz \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_p)^n$$

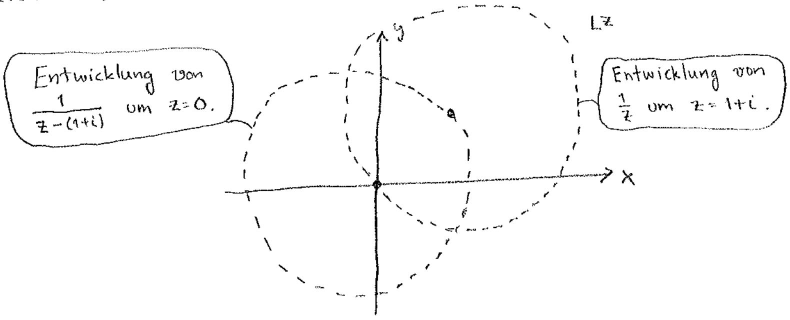
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_p|=\varepsilon} dz\, \frac{a_{-1}}{z-z_p} = a_{-1}\,.$$

Bemerkung: Normalerweise werden Pole nur einmal umgelaufen, deshalb ist $\nu_\gamma(p) = \pm 1$.

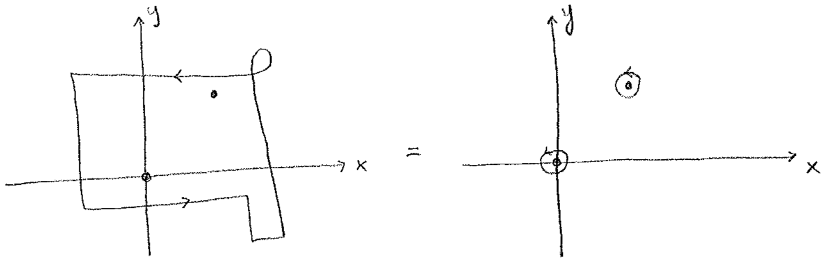
Beispiel: $\displaystyle\oint_\gamma \frac{dz}{z(z-(1+i))}$ mit



Konvergenzbereiche von Laurent-Reihen:



Diese können also nicht direkt benutzt werden.
Auch wollen wir wegen Schlitze nicht unbedingt Stammfunktionen benutzen. Aber mit Residuensatz ist es einfach:



Beitrag vom $z=0$: $\displaystyle\oint_{|z|=\varepsilon} \frac{dz}{z\,(z-(1+i))} = \frac{1}{-1-i}\oint_{|z|=\varepsilon}\frac{dz}{z} = \frac{2\pi i}{-1-i}$

kann entwickelt werden

Beitrag vom $z=1+i$: $\displaystyle\oint_{|z-(1+i)|=\varepsilon} \frac{dz}{z\,(z-(1+i))} = \frac{1}{1+i}\oint_{|z-(1+i)|=\varepsilon}\frac{dz}{z-(1+i)} = \frac{2\pi i}{1+i}$

kann entwickelt werden

Insgesamt: $2\pi i\left(-\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1+i}\right) = 0$!

Numerisch:
(ein wenig vereinfacht)

```
In[1]:= f[x_, y_] := 1 / (x + I y) / (x + I y - 1 - I)
In[2]:= teil1 = NIntegrate[f[x, -1], {x, -3, 5}]
Out[2]= -0.442952 + 0.0348033 i
In[3]:= teil2 = NIntegrate[I f[5, y], {y, -1, 4}]
Out[3]= 0.0594231 + 0.175589 i
In[4]:= teil3 = NIntegrate[f[x, 4], {x, 5, -3}]
Out[4]= 0.281191 + 0.0338429 i
In[5]:= teil4 = NIntegrate[I f[-3, y], {y, 4, -1}]
Out[5]= 0.102338 - 0.244235 i
In[6]:= teil1 + teil2 + teil3 + teil4
Out[6]= -4.94049 × 10^-15 + 1.21569 × 10^-14 i
```