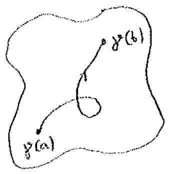
4. Komplexe Integration

4.1 Grundbegriffe [Arfken 6.3]

Komplexe Integrale bzw. „Konturintegrale" sind nah verwandt mit reellen Kurven- bzw. Linienintegralen. Wenn der Integrand <u>analytisch</u> ist, fungiert er wie eine „konservative Kraft", d.h. $\int d\vec{s}\cdot\vec{F}$ ist <u>unabhängig vom Integrationsweg</u>, wenn wir innerhalb eines bestimmten Gebiets bleiben.



<u>Definition:</u> Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\gamma : [a,b] \to G$ in darin verlaufender stetig differenzierbarer Weg, und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion. Dann definiert man

$$\int_\gamma dz\, f(z) := \int_a^b dt\, \dot{\gamma}(t) f(\gamma(t)) \;=\; "\int_a^b dt \frac{dz}{dt} f(z)" .$$

Bemerkung: Wenn man $z = x+iy$ und $f = u+iv$ schreibt, dann besteht das Integral aus zwei normalen reellen Integralen:

$$\int_a^b dt \left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)(u+iv) = \int_a^b dt \left(\frac{dx}{dt}u - \frac{dy}{dt}v\right) + i\int_a^b dt \left(\frac{dx}{dt}v + \frac{dy}{dt}u\right).$$

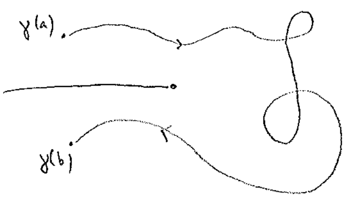
<u>Lemma:</u> Sei f eine <u>analytische</u> Funktion auf G, die auf einem Teilgebiet $U \subset G$ eine Stammfunktion F, mit $F'(z) = f(z)$, besitzt. Dann gilt für $\gamma : [a,b] \to U$

$$\int_\gamma dz\, f(z) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis:

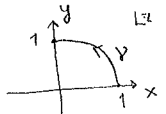
$$\int_a^b dt\, \dot{\gamma}(t)\, f(\gamma(t)) = \int_a^b dt \frac{d\gamma}{dt}\frac{dF}{d\gamma} \underset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b dt \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \quad \square .$$

Bemerkung: Wenn z.B. $f = \frac{1}{z}$, ist $G = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, aber U ist kleiner, weil $F = \ln(z)$ einen Schlitz hat. Integration über den Schlitz gelingt <u>nicht</u> mit einer Stammfunktion (d.h. Hauptzweig).



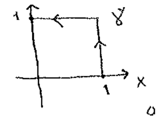
<u>Beispiele</u>:

(i) $f(z) = (z^*)^2$



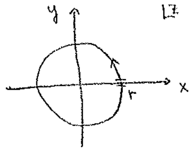
$$\int_\gamma dz\,(z^*)^2 = \int_0^{\pi/2} d\varphi\,\frac{d(e^{i\varphi})}{d\varphi}\,(e^{-i\varphi})^2 = i\int_0^{\pi/2} d\varphi\, e^{-i\varphi} = -\left[e^{-i\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = i+1.$$

(ii) $f(z) = (z^*)^2$



$$\int_\gamma dz\,(z^*)^2 = \int_0^1 i\,dy\,(1-iy)^2 + \int_1^0 dx\,(x-i)^2$$
$$= i\int_0^1 dy\,(1-2iy-y^2) - \int_0^1 dx\,(x^2-2ix-1)$$
$$= i\left[y - iy^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - ix^2 - x\right]_0^1$$
$$= i\left(1-i-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}-i-1\right) = i+1-\frac{i}{3}-\frac{1}{3}+i+1 = \frac{5}{3}(1+i).$$

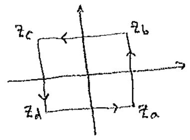
(iii) $f(z) = z^n$



$z = re^{i\varphi}$
$dz = i\,d\varphi\, re^{i\varphi}$

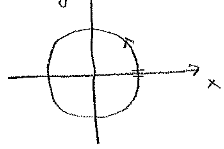
$$\int_\gamma dz\, z^n = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi\, re^{i\varphi}\,(re^{i\varphi})^n$$
$$= i r^n \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i(n+1)\varphi} \underset{n\neq-1}{=} \frac{ir^n}{i(n+1)}\left[e^{i(n+1)\varphi}\right]_0^{2\pi} = 0$$

(iv) $f(z) = z^n$



$$\int_\gamma dz\, z^n \underset{n\neq-1}{=} \left[\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_{z_a}^{z_b} + \left[\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_{z_b}^{z_c} + \left[\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_{z_c}^{z_d} + \left[\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_{z_d}^{z_a} = 0$$

(v) $f(z) = \frac{1}{z}$, d.h. $n = -1$.



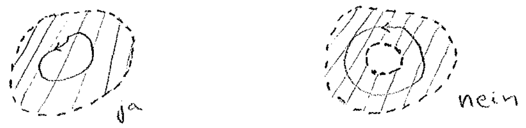
Wenn wir <u>nicht</u> mit Stammfunktion sondern direkt integrieren, brauchen wir uns um den Schlitz von $\ln(z)$ nicht zu kümmern!

$z = re^{i\varphi}$; $dz = i\,d\varphi\, re^{i\varphi}$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,d\varphi\,\cancel{r}\cancel{e^{i\varphi}}}{\cancel{r}\cancel{e^{i\varphi}}} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i}.$$

Beziehung zur konservativen Kraft

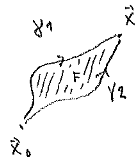
Zur Erinnerung: Ein Gebiet ist „einfach zusammenhängend", falls jede geschloßene Kurve sich stetig zu einem Punkt zusammenziehen läßt:



Falls auch $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, ist dann

$$V(\vec{x}) := - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s} \cdot \vec{F}(\vec{s})$$

unabhängig vom Integrationsweg. Denn



$$\int_{\gamma_1} d\vec{s} \cdot \vec{F} - \int_{\gamma_2} d\vec{s} \cdot \vec{F} = \oint_{\gamma_1 - \gamma_2} d\vec{s} \cdot \vec{F} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_F d\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{F} = 0$$

Bei komplexen Integralen: Wenn f analytisch ist und als $f = u + iv$ geschrieben wird, sind die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllt (vgl. Seite 73):

$$\partial_x u = \partial_y v \quad , \quad \partial_y u = -\partial_x v \quad .$$

Betrachte
$$\int_\gamma dz\, f = \int_a^b dt \left(\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right)(u + iv)$$
$$= \int_a^b dt \left\{ \frac{dx}{dt} u - \frac{dy}{dt} v + i \left[\frac{dx}{dt} v + \frac{dy}{dt} u \right] \right\} .$$

Hier können zwei zweidimensionale „Kräfte" identifiziert werden:

$$\vec{F}_1 := u \vec{e}_x - v \vec{e}_y \quad ,$$
$$\vec{F}_2 := iv \vec{e}_x + iu \vec{e}_y \quad .$$

Beide sind aber „wirbelfrei":

$$\nabla \times \vec{F}_1 = \vec{e}_z \left(-\partial_x v - \partial_y u \right) \underset{\boxed{\text{2. Cauchy-Riemann}}}{=} \vec{0}$$

$$\nabla \times \vec{F}_2 = i \vec{e}_z \left(\partial_x u - \partial_y v \right) \underset{\boxed{\text{1. Cauchy-Riemann}}}{=} \vec{0}$$

(Die Aussagen bzgl. komplexer Integration sollten aber <u>nicht</u> als Spezialfälle des Stokesschen Satzes betrachtet werden, sondern sind von allgemeinerer Natur.)

Geschlossene Integrationswege

Wenn $\gamma(b) = \gamma(a)$, wird das Integral als

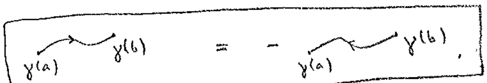
$$\oint dz\, f(z)$$

bezeichnet; die „positive" Laufrichtung zeige gegen den Uhrzeigersinn.

Bemerkungen:

* $\boxed{\text{Wenn } \gamma \text{ ganz in einem Teilgebiet läuft, in dem } f \text{ eine Stammfunktion } F \text{ besitzt, so ist } \oint dz\, f(z) = 0 .}$

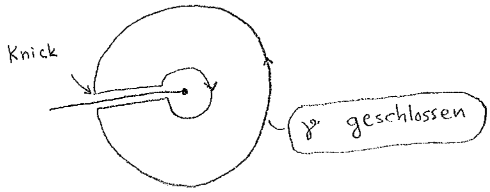
(Denn: $\gamma(b) = \gamma(a)$ & Lemma aus Seite 85).

* 

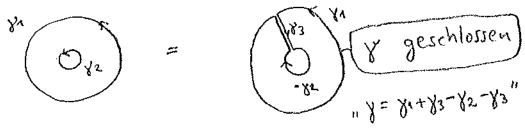
$$\left(\text{Denn: } \int_a^b dt\, \gamma'(t)\, f(\gamma(t)) = -\int_b^a dt\, \gamma'(t)\, f(\gamma(t)) . \right)$$

Beispiele:

* Gebiet mit Schlitz:



* Gebiet ohne Schlitze:

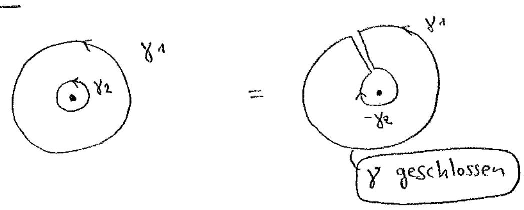


Wenn Stammfunktion überall existiert, gilt

$$0 = \oint_{\gamma} dz\, f(z) = \oint_{\gamma_1} dz\, f(z) + \cancel{\int_{\gamma_3} dz\, f(z)} - \oint_{\gamma_2} dz\, f(z) - \cancel{\int_{\gamma_3} dz\, f(z)}$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma_2} dz\, f(z) = \oint_{\gamma_1} dz\, f(z) = 0 .$$

* Punktiertes Gebiet:



Wir erhalten wieder

$$\oint_{\gamma_2} dz\, f(z) = \oint_{\gamma_1} dz\, f(z) ,$$

aber diesmal kann der Wert des Integrals ungleich null sein!
