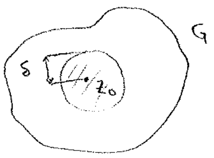
## 3.3 Potenzreihe, Laurent-Reihe [Arfken 6.5]

1813–1854

Viele analytische (d.h. komplex-differenzierbare) Funktionen können durch eine Potenzreihe definiert werden; wie bei Differenzierbarkeit sind auch hier die Grundaussagen stärker als bei reellen Funktionen. (Allerdings kann einiges erst anhand komplexer Integration diskutiert werden, vgl. Kap. 4.)

1815 – 1897 **Weierstraßscher Konvergenzsatz:** Konvergiert eine Folge $(f_n)$ analytischer Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$ „lokal gleichmäßig" (d.h. $\forall z_0 \in G$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists \delta > 0$ so dass $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ wenn $|z - z_0| < \delta$ und $n > n_0$), dann ist die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ auch analytisch, und es gilt:

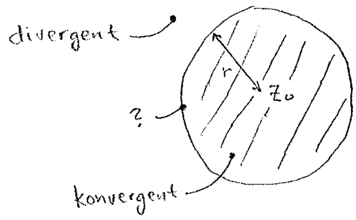
$$f'(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z) .$$




Beweis: Über die Cauchy-Formel (vgl. Kap. 4.3).

**Anwendung:** Eine **Potenzreihe** um $z_0$ ist eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \right\} .$$




Die Potenzreihe konvergiert „absolut" innerhalb eines **Konvergenzradius**, $r$:

$$r = \sup \left\{ |z-z_0| \;\Big|\; \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |z-z_0|^k \text{ konvergiert} \right\}.$$

Im **Konvergenzkreis** können Potenzreihen laut Weierstraß gliedweise abgeleitet werden; der Konvergenzradius bleibt dabei erhalten.

**Bemerkungen:** Sei

$$\rho_k(z) := \frac{|a_{k+1}| |z-z_0|^{k+1}}{|a_k| |z-z_0|^k} = \frac{|a_{k+1}| |z-z_0|}{|a_k|} ,$$

und $\rho(z) := \lim_{k\to\infty} \rho_k(z)$, falls der Limes existiert.

Wenn $\rho(z) < 1$ ist die Reihe absolut konvergent, denn für $k \geq k_0$, wobei $\rho_k < \delta < 1$, gilt

$$\begin{aligned} |a_{k+1}| |z-z_0|^{k+1} &= \rho_k \, |a_k| |z-z_0|^k \\ &= \rho_k \, \rho_{k-1} \, |a_{k-1}| |z-z_0|^{k-1} \\ &\leq \delta^{k+1-k_0} \, |a_{k_0}| |z-z_0|^{k_0} , \end{aligned}$$

und

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_{k+1}| |z-z_0|^{k+1} \leq |a_{k_0}| |z-z_0|^{k_0} \cdot \delta \cdot \underbrace{\sum_{k=k_0}^{\infty} \delta^{k-k_0}}_{\text{konvergiert für } 0<\delta<1}$$

Konvergenzradius erfährt man aus dem Grenzfall $\rho(z) = 1$, d.h. $r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$.

**Elementare Funktionen:** Viele wichtige Funktionen, insbesondere die Exponentialfunktion, können als Potenzreihen in der komplexen Ebene definiert werden.

(i) $$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Konvergenzradius: $r = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty$ ($\Rightarrow$ eine „ganze" Funktion)

Wichtige Eigenschaften: $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ ;

$$\frac{d}{dz} e^z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = e^z .$$

(ii) $$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \ ;$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ ; \quad r = \infty .$$

(iii) $$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \ ;$$

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(iz)}{i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ ;$$

$r = \infty$ .

(iv) $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ ; $\tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$ (außerhalb der Nennernullstellen)

**Konsequenzen:**

* $$e^{iz} = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz} + e^{iz} - e^{-iz}\right) = \cos(z) + i\sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

„Euler-Formel"

* $$e^{i(z_1+z_2)} = \cos(z_1+z_2) + i\sin(z_1+z_2) = e^{iz_1} e^{iz_2} = \left[\cos(z_1) + i\sin(z_1)\right]\left[\cos(z_2) + i\sin(z_2)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) \\ \sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) \end{cases}$$

* $$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

* $$e^{i(z+\pi)} = \cos(z+\pi) + i\sin(z+\pi) = -e^{iz} = -\cos(z) - i\sin(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(z+\pi) = -\cos(z) \\ \sin(z+\pi) = -\sin(z) \end{cases}$$

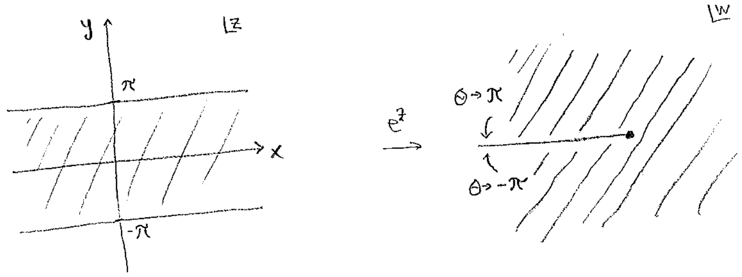
* usw — alles ist einfach wenn durch die Exponentialfunktion $e^z$ ausgedrückt.

**Umkehrfunktionen:**

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heißt Logarithmus. Diese ist wieder „lokal" eine analytische Funktion (vgl. Seite 76), aber ihre „globale" Struktur ist nichttrivial.

Darstellung des Bildes in Polarkoordinaten (vgl. Seite 69):

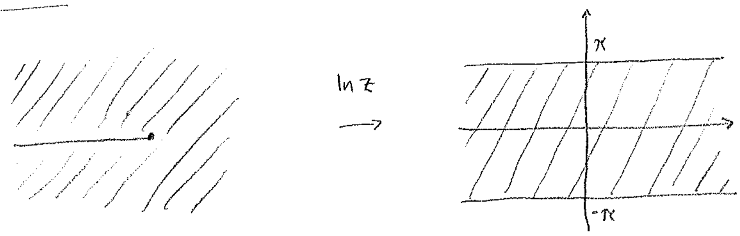
$$z = x+iy \quad ; \quad e^z = e^x e^{iy} =: \rho e^{i\theta} \quad ; \quad \begin{cases} \rho = e^x > 0 \\ \theta = y + 2\pi k. \end{cases}$$




Der Streifen $\pi < y < 3\pi$ wird erneut auf die geschlitzte Ebene abgebildet, ebenfalls $3\pi < y < 5\pi$ usw.

**Definition:**

Die komplexe Exponentialfunktion definiert eine Abbildung des Streifens $\{z \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$ auf die geschlitzte Ebene. Die Inverse dieser Abbildung heißt der Hauptzweig des Logarithmus und wird mit ln bezeichnet.




Es gilt:
* $\ln(\rho e^{i\theta}) = \ln(\rho) + i\theta$,

  denn $e^{\ln(\rho)+i\theta} = \rho e^{i\theta}$.
* $\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$,

  denn (für $z = e^w$) $\quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{de^w}{dw}} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$.

**Erweiterungen:**

* Nebenzweige des Logarithmus können ebenfalls definiert werden; Bild liegt im Streifen $\mathrm{Im}(\ln_k z) \in (-\pi, \pi) + 2\pi k$.
* Allgemeine Exponentialfunktionen und allgemeine Potenzen werden durch den Hauptzweig definiert:

$$a^z := e^{z \ln a} \quad ; \quad z^w := e^{w \ln z}.$$

* Der Hauptzweig des Logarithmus taucht ebenfalls bei Inversen von hyperbolischen bzw. trigonometrischen Funktionen auf:

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = w \quad \Leftrightarrow \quad (e^{2z} - 1) = w(e^{2z} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2z}(1-w) = 1+w \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+w}{1-w}.$$

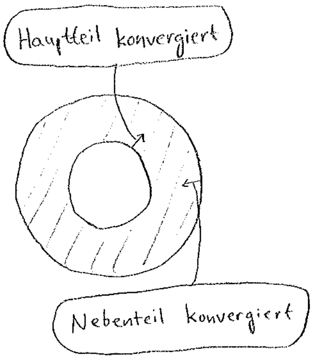
## Laurent-Reihen:

Aus einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ mit Konvergenzradius $r$ läßt sich eine neue Reihe mit negativen Potenzen bilden:

$$g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(z-z_0)^k}.$$

Diese konvergiert gleichmäßig bei $|z-z_0| > r$, und ist wieder eine analytische Funktion.

Kreisring



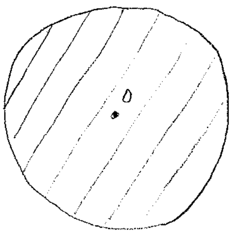

Allgemeiner: Unter einer Laurent-Reihe um den Punkt $z_0 = 0$ versteht man eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}}_{\text{„Hauptteil"}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}_{\text{„Nebenteil"}} .$$

Die Laurent-Reihe konvergiere an der Stelle $z$, wenn Haupt- und Nebenteil einzeln dort konvergieren. Die Reihe stellt dann eine analytische Funktion dar; man darf gliedweise ableiten, und das Ergebnis hat denselben Konvergenzkreisring:

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n n z^{n-1} .$$

punktierte Kreisscheibe




Wenn der Hauptteil nur endlich viele Koeffizienten hat, d.h.

$$\frac{a_{-N}}{z^N} + \ldots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} ,$$

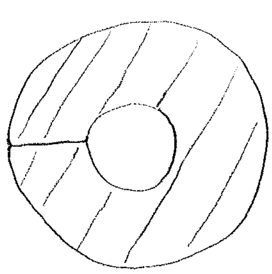
konvergiert er bei allen $|z| > 0$, d.h. auf einer punktierten Kreisscheibe. Von einer Laurent-Reihe mit solchem Hauptteil sagt man, sie habe bei 0 einen Pol.

## Stammfunktion:

Beim Nebenteil kann man die Stammfunktion gliedweise gleich erraten: $a_n z^n = \frac{d}{dz} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$.

Dies geht aber nicht bei $n = -1$; die Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ ist keine Potenz sondern Logarithmus (vgl. Seite 79).

Geschlitzter Kreisring



Ist also $a_{-1} \neq 0$, gibt es eine Stammfunktion nur auf dem geschlitzten Kreisring:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \frac{d}{dz} \left\{ \left( \sum_{n=-\infty}^{-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \right) \frac{a_n z^{n+1}}{n+1} + a_{-1} \ln z \right\} .$$

Die Zahl $a_{-1} \in \mathbb{C}$ heißt das Residuum.