3. Komplexe Funktionen

3.1 Komplexe Zahlenebene [Arfken 6.1, 6.7]

Zur Erinnerung (Seite 23): Der Körper $(\mathbb{C}, +, *)$ komplexer Zahlen besteht aus Elementen

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:i} = x + iy ,$$

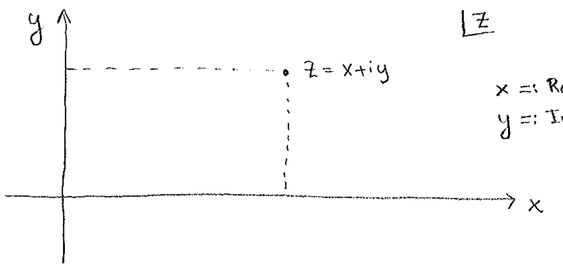
mit einer abelschen Multiplikation „$*$", die die Eigenschaften $(z_1 z_2 := z_1 * z_2)$

$$1^2 = 1 , \quad i^2 = -1 , \quad 1 * i = i * 1 = i$$

aufweist. Komplexe Konjugation ist eine Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

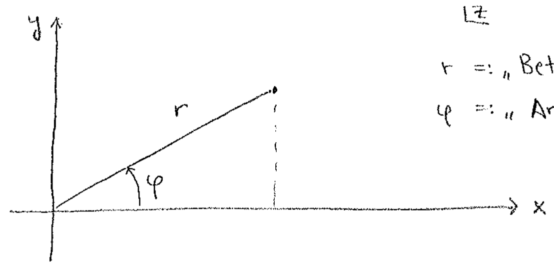
$$z \mapsto z^* := x - iy .$$

Graphische Darstellung:



$x =: \operatorname{Re} z$
$y =: \operatorname{Im} z$

Es scheint vernünftig, Polarkoordinaten einzuführen:



$r =:$ „Betrag"
$\varphi =:$ „Argument"

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} , \quad x = r\cos\varphi ; \quad y = r \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad z = r\cos\varphi + i r \sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \overset{!}{=} r e^{i\varphi} .$$

(„Euler-Formel"; Beweis durch Potenzreihen, vgl. S. 78)

Wir bezeichnen auch $|z| := r$, und $\arg z := \varphi$. Das Argument ist nicht eindeutig; z.B. $\frac{3\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ stellen die selbe z dar.

Bei komplexer Konjugation:

$$z^* = r\cos\varphi - i r \sin\varphi = r\left[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)\right] = r e^{-i\varphi} .$$

Einige Rechenregeln:

- $(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

  [Denn: $x_1+x_2 - i(y_1+y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2$]

- $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

  [Denn: $x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2+x_2y_1) = (x_1-iy_1)(x_2-iy_2)$]

- $(z^*)^* = z$

  [Denn: $x - i(-y) = x+iy$]

- $\operatorname{Re} z = \frac{z+z^*}{2}$; $\operatorname{Im} z = \frac{z-z^*}{2i}$

  [Denn: $x+iy+x-iy = 2x$; $x+iy-(x-iy) = 2iy$]

- $zz^* = |z|^2$; $|z| = \sqrt{zz^*}$

  [Denn: $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 \in \mathbb{R}$]

- $z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}$

  [Denn: $\frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$; vgl. Seite 23]

- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

  [Denn: $|z_1z_2|^2 = z_1z_2(z_1z_2)^* = z_1z_1^* z_2z_2^*$]

- $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

  [Geometrisch aus der Dreiecksgleichung.]

- $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

  [Denn: $r_1e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$]

- $\arg(z^{-1}) = -\arg z$

  [Denn: $z^{-1} = \frac{re^{-i\varphi}}{|z|^2} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$.]

- $\arg(z^*) = -\arg z$

  [Denn: $z^* = re^{-i\varphi}$]

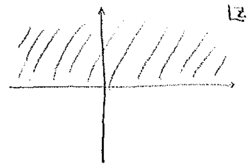
- $\arg(|z|) = 0$

  [Denn: $|z| = |re^{i\varphi}| = |r|\underbrace{|e^{i\varphi}|} = r$]

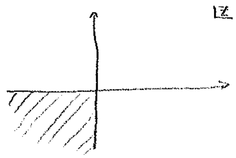
$$\boxed{\begin{aligned}&\sqrt{(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}\\ &= \sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = 1.\end{aligned}}$$

Gebiete der komplexen Zahlenebene:

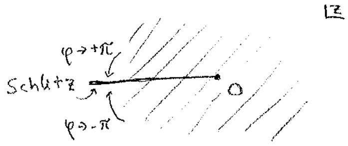
(i) Halbebenen, z.B. die obere Halbebene $H = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$.



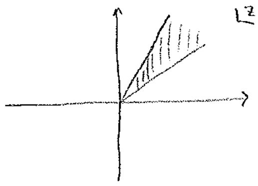
(ii) Quadranten, z.B.
$Q = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z < 0 \}$



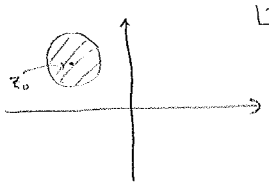
(iii) Die negativ geschlitzte Ebene: Schneide die negative reelle Achse weg, d.h.
$$G = \{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \arg z < \pi \}$$



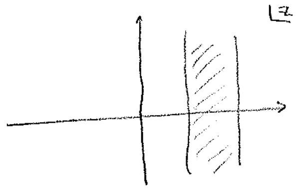
(iv) Sektoren:
$$S = \{ re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0,\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \}$$



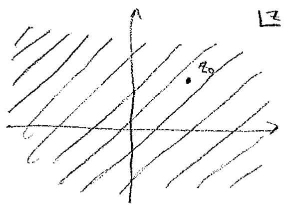
(v) Kreisscheiben:
$$K_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$$
Einheitskreisscheibe:
$$E(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < 1 \}$$



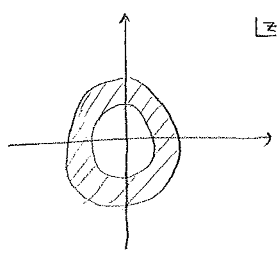
(vi) Streifen, z.B.
$$B = \{ z \in \mathbb{C} \mid x_1 < \operatorname{Re} z < x_2 \}$$



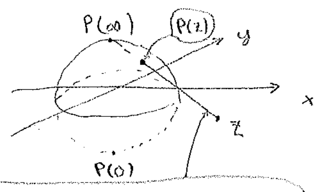
(vii) Punktierte Gebiete, z.B.
$$\mathbb{C} \setminus \{ z_0 \}$$



(viii) Kreisringe, z.B.
$$C = \{ z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2 \}$$



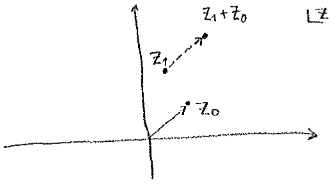
(ix) „Unendlich ferner Punkt", ∞, mit $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$.
Der Raum $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kann als die „riemannsche Zahlenkugel" identifiziert werden.



Stereographische Projektion von $\mathbb{C}$ auf Oberfläche der Kugel.

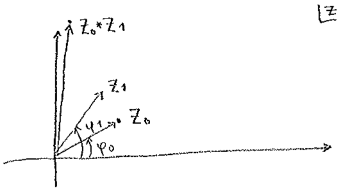
Anschauliche Bedeutung einiger Rechenoperationen

(i) Die Addition entspricht einer Translation.

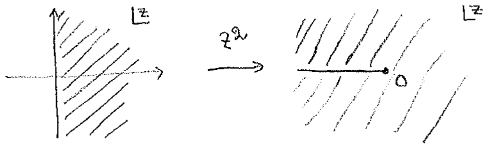


(ii) Die Multiplikation mit $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ entspricht Drehung um φ_0, Streckung um r_0:

$$z_0 z_1 = r_0 r_1 e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}$$

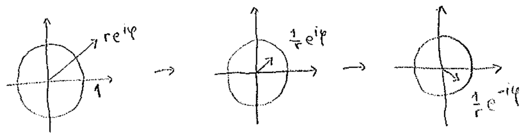


(iii) Das Quadrieren bzw. Potenzieren läuft wie Multiplikation. Insbesondere: bei $z \mapsto z^2$ geht die rechte Halbebene in die negativ geschlitzte Ebene über:



(iv) Die Inversion entspricht Hintereinanderausführung von „Spiegelung an der Einheitskreislinie" und komplexer Konjugation:

$$z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$$



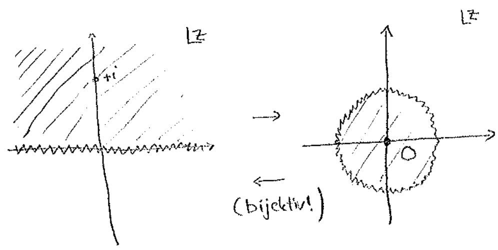
(v) Gebrochen lineare Transformationen:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0^*$$

Diese Transformation ist „kreistreu":

$$\{\text{Kreise, Linien}\} \longrightarrow \{\text{Kreise, Linien}\}.$$

Beispiel: $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$



$\left(z \in \mathbb{R} \Rightarrow |z-i| = \sqrt{x^2+1} = |z+i| \Rightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1.\right)$

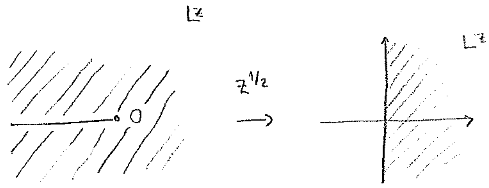
* Dies garantiert die lineare Unabhängigkeit von Zähler und Nenner.

(vi) Das Wurzelziehen:

$$z^{\frac{1}{n}} = (re^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi}{n}}.$$

Hier muß man aber aufpassen:

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi}, \quad \text{aber } e^{i\frac{\pi}{2}} \neq e^{-i\frac{\pi}{2}}!$$

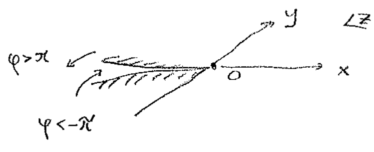


D.h. „Wurzel ist nicht eindeutig".

Alle Möglichkeiten: $\left(re^{i[\varphi+2\pi k]}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left[\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right]}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Eine eindeutige Wurzel erhält man durch Definition von „Zweigen".

Hauptzweig: $\varphi \in (-\pi, \pi)$;
$z^{\frac{1}{n}} := r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi}{n}}$



Nebenzweige: gehe in eine andere „Riemannsche Fläche", mit $\varphi < -\pi$ oder $\varphi > \pi$; dann bleibt Wurzel eine stetige Funktion.