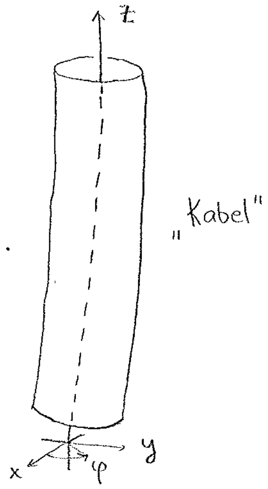
2.8 Bessel-Funktionen als Beispiel [Arfken 11.1-2]

Betrachtet wird eine Wellengleichung in Zylinderkoordinaten:



$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = 0 \quad ;$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad ; \; \rho = \sqrt{x^2+y^2} \, .$$

Separationsansatz mit Wellenbewegung in z-Richtung:

$$\phi = u(\rho)\cos(m\varphi+\varphi_0)\cos(\omega t - kz) \, ,$$

wobei $m \in \mathbb{Z}$ wegen Periodizität.

Es folgt:
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\phi = -\dfrac{m^2}{\rho^2}\phi \\[2ex] \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = \left(-k^2 + \dfrac{\omega^2}{c^2}\right)\phi \end{cases}$$

dividiere durch $\cos(m\varphi+\varphi_0)\cos(\omega t - kz)$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)u = 0 \, .$$

Nehme an: $\omega^2 \geq c^2 k^2$ [quantenmechanisch: $E^2 := \hbar^2\omega^2 \geq c^2\hbar^2 k^2 =: c^2 p^2$, z.B. $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$.]

Bezeichne: $\gamma^2 := \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$; $x := \gamma\rho$; $\frac{d}{d\rho} = \gamma\frac{d}{dx}$; $\frac{d^2}{d\rho^2} = \gamma^2\frac{d^2}{dx^2}$

dividiere durch γ^2 und bezeichne $u(\rho) = u\left(\frac{x}{\gamma}\right) =: J(x)$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{m^2}{x^2} + 1\right)J = 0 \, .}$$

„Besselsche Differenzialgleichung"

Bemerke: $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ}{dx}\right) = \frac{d^2J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx}$.

Multipliziere die ganze Gleichung durch x .

So erhält man die selbstadjungierte Form:

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ}{dx}\right)}_{p(x)} - \underbrace{\frac{m^2}{x}}_{q(x)}J + \underbrace{x}_{w(x)}\underbrace{J}_{\lambda=1} = 0 \, .}$$

In ursprünglichen Koordinaten:

$$\boxed{\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho}u + \underbrace{\gamma^2}_{\lambda=\gamma^2}\overbrace{\rho}^{w(\rho)}u = 0 \, .}$$

Randbedingungen:

Nehmen wir an, dass das Kabel den Radius r hat. Dann ist $a = 0$ und $b = x_{max} = \gamma \varrho_{max} = \gamma \cdot r$.

Die gewöhnlichen Randbedingungen waren (vgl. Seite 52)

$$\begin{cases} \cos(\alpha)\, J(a) + \sin(\alpha)\, p(a)\, J'(a) = 0 , \\ \cos(\beta)\, J(b) + \sin(\beta)\, p(b)\, J'(b) = 0 . \end{cases}$$

Wir wählen $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bei $x = a$ und $\beta = 0$ bei $x = b$,

d.h. $\lim_{x \to 0} x \frac{dJ}{dx} = 0$ und $J(b) = 0$.

Einiges zur Lösung:

Nehme Ansatz $J = x^\alpha + c\, x^{\alpha+2} + \mathcal{O}(x^{\alpha+4})$ bei $x \ll 1$.

$$\Rightarrow x J' \approx \alpha x^\alpha + c(\alpha+2) x^{\alpha+2} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xJ') \approx \alpha^2 x^{\alpha-1} + c(\alpha+2)^2 x^{\alpha+1} + \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \alpha^2 x^{\alpha-1} + c(\alpha+2)^2 x^{\alpha+1} & \leftarrow (xJ')' \\ & - m^2 x^{\alpha-1} - c \cdot m^2 \, x^{\alpha+1} & \leftarrow -\frac{m^2 J}{x} \\ & + x^{\alpha+1} = 0 & \leftarrow xJ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = m^2 \\ [(\alpha+2)^2 - m^2]\, c + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \pm |m| \\ c = -\frac{1}{4\alpha + 4} \end{cases}$$

Wenn $|m| \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ist nur $\alpha = +|m|$ erlaubt, weil $\lim_{x\to 0} xJ' = \lim_{x \to 0} \alpha x^\alpha$ verschwinden soll.

Dann ist die Lösung aber völlig fixiert (außer Normierung):

$$J = x^{|m|} - \frac{1}{4(|m|+1)} x^{|m|+2} + \dots .$$

Welche Rolle spielt die andere Randbedingung?

Notation:

Aus historischen Gründen wird die gefundene Lösung, „mit Eigenwert $\lambda = 1$" und mit einem freien Parameter in der Funktion $q(x) = -\frac{m^2}{x}$, die Bessel-Funktion $J_m(x)$ genannt.

Die zweite Randbedingung, $J_m(\gamma r) = 0$, kann für eine bestimmte diskrete Menge von γ's erfüllt werden, nämlich γ_n, $n = 1, 2, \dots$, so dass $\gamma_n r$ eine Nullstelle von J_m ist.

„Ordentlich" bezeichnete Basisfunktionen wären dann

$$u_n(\varrho) := J_m(\gamma_n \varrho),$$

mit entsprechenden Eigenwerten $\lambda_n = \gamma_n^2$.

Orthonormierung:

Mit Gewichtsfunktion $w(\rho) = \rho$ (vgl. Seite 65) folgt nun

$$0 = \int_0^r d\rho\, \rho\, u_k(\rho)\, u_l(\rho)$$

$$= \int_0^r d\rho\, \rho\, J_m(\gamma_k \rho)\, J_m(\gamma_l \rho) \quad , \quad k \neq l \,.$$

Wie die Legendre-Polynome (vgl. Seite 58) sind auch die Bessel-funktionen nicht automatisch richtig normiert. Es gilt (ohne Beweis)

$$\int_0^r d\rho\, \rho\, [u_k(\rho)]^2 = \int_0^r d\rho\, \rho\, [J_m(\gamma_k \rho)]^2 = \frac{r^2}{2} \left[J_{m+1}(\gamma_k r)\right]^2 \,.$$

Bessel-Reihe (statt Fourier-Reihe):

Jede Funktion, die die gegebenen Randbedingungen erfüllt, kann als Bessel-Reihe dargestellt werden:

$$f_B(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, J_m(\gamma_n \rho) \quad ;$$

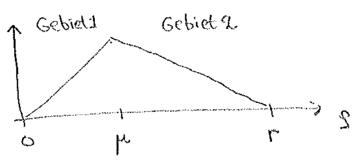
$$c_n = \frac{2}{r^2 [J_{m+1}(\gamma_n r)]^2} \int_0^r d\rho\, \rho\, J_m(\gamma_n \rho)\, f(\rho) \,.$$

In einer bestimmten Klasse von Funktion ist die Basis vollständig, d.h. die Parsevalsche Identität wird erfüllt (vgl. Seite 60).

Greensche Funktion (vgl. Seite 63):

Seite 65 mit Eigenwert $\lambda = 0$ (benutze ρ als Variable):

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} \right) G(\rho;\mu) = 0$$



Lösung (vgl. Seite 66): $G(\rho;\mu) = a\rho^m + b\rho^{-m}$; sei $m \geq 1$.

Rand $\rho = 0$: $b_1 = 0$; $G_1 = a_1 \rho^m$

Rand $\rho = r$: $a_2 r^m + b_2 r^{-m} = 0$; $b_2 = -a_2 r^{2m}$; $G_2 = a_2 \left(\rho^m - \frac{r^{2m}}{\rho^m}\right)$

Anschlußbedingungen: $*$ $a_1 \mu^m = a_2 \mu^m - a_2 r^{2m} \mu^{-m} \Rightarrow a_1 = a_2\left(1 - \left(\frac{r}{\mu}\right)^{2m}\right)$

$*$ $m a_1 \mu^{m-1} = m a_2 \mu^{m-1} + a_2 r^{2m} m \mu^{-m-1} + \frac{1}{\mu} \quad \Big| \; \frac{\mu}{m\mu^m}$

$$\Rightarrow a_1 = a_2\left(1 + \left(\frac{r}{\mu}\right)^{2m}\right) + \frac{1}{m\mu^m}$$

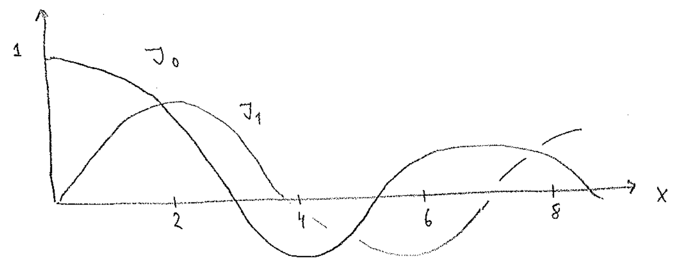
$$\Leftrightarrow 2a_2 \left(\frac{r}{\mu}\right)^{2m} = -\frac{1}{m\mu^m} \Rightarrow a_2 = \frac{-1}{2m}\frac{\mu^m}{r^{2m}}$$

$$\Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\mu^m}{r^{2m}} - \frac{1}{\mu^m}\right)$$

$$\Rightarrow G(\rho;\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2m} \cdot \frac{\rho^m}{r^m}\left(\frac{r^m}{\mu^m} - \frac{\mu^m}{r^m}\right) & , \; \rho < \mu \\ \frac{1}{2m} \cdot \frac{\mu^m}{r^m}\left(\frac{r^m}{\rho^m} - \frac{\rho^m}{r^m}\right) & , \; \rho > \mu \,. \end{cases}$$

Zurück zur Physik (vgl. Seite 65):

Welche Eigenwerte gibt es? Aus Büchern:



Bei großem x: $J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$

Oder explizit:

$$J =: x^\alpha f$$
$$J' = \alpha x^{\alpha-1} f + x^\alpha f'$$
$$x J' = \alpha x^\alpha f + x^{\alpha+1} f'$$
$$(x J')' = \alpha^2 x^{\alpha-1} f + (2\alpha+1) x^\alpha f' + x^{\alpha+1} f'' \quad \Rightarrow \text{ wähle } \alpha = -\tfrac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} f + x^{\frac{1}{2}} f'' - m^2 x^{-\frac{3}{2}} f + x^{\frac{1}{2}} f = 0$$

klein bei $x \gg 1$

$$\Rightarrow f'' + f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = C \cdot \cos(x - x_0).$$

Nullstellen liegen also bei $x = x_0 + \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$; $x_0 = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$.

Laut Seite 66 sind die Eigenwerte $\lambda_n = \gamma_n^2$, wobei γ_n durch die Randbedingung $J_m(\gamma_n r) = 0$ fixiert wird.

$$\Rightarrow \gamma_n r = x_0 + \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$$
$$\Rightarrow \lambda_n = \gamma_n^2 = \left(\frac{x_0 + \frac{\pi}{2}}{r} + \frac{\pi}{r} \cdot n\right)^2$$

Laut Seite 65 ist $\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

Wellenbewegung innerhalb des Kabels hat also nicht die „Dispersionsrelation" $\omega = ck$ des Vakuums, sondern es gibt „quantisierte Moden":

$$\omega^2 = c^2 k^2 + c^2 \gamma_n^2$$
$$\Rightarrow \quad E^2 = p^2 c^2 + \underbrace{\hbar^2 c^2 \left(\frac{x_0 + \frac{\pi}{2}}{r} + \frac{\pi n}{r}\right)^2}_{\text{Wie „Massen" in der Einstein-Beziehung.}}$$

Vgl. Seite 65

— ∘ —