2.4 Selbstadjungierte Differenzialoperatoren [Arfken 10.1]

Im Kapitel 2.3 wurde die allgemeine Struktur linearer Basistransformationen in Funktionenräumen diskutiert. Jetzt möchten wir unterschiedliche Basen als Eigenfunktionen linearer Differenzialoperatoren verstehen, vgl. Kapiteln 1.8, 1.9.
(Man spricht hier vom „Sturm – Liouville – Problem".)
1803–1855 1809–1882

Sei vorerst $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine mindestens zweimal differenzierbare Funktion, und $\mathcal{L}$ ein linearer Differenzialoperator zweiter Ordnung:

$$\mathcal{L} := p_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_2(x) .$$

Die Funktion $p_0(x)$ sei zweimal differenzierbar und besitze keine Nullstellen im (a,b); $p_1(x)$ sei einmal differenzierbar; $p_2(x)$ sei kontinuierlich.

Wir betrachten das Skalarprodukt $\langle g | \mathcal{L} f \rangle := \int_a^b dx\, g(x)\, \mathcal{L} f(x)$.
Unter welchen Umständen ist $\langle g | \mathcal{L} f \rangle = \langle \mathcal{L} g | f \rangle$? (vgl. Seite 30)

Führe partielle Integrationen durch:

$$\langle g | \mathcal{L} f \rangle = \int_a^b dx\, g \left[p_0 \frac{d^2 f}{dx^2} + p_1 \frac{df}{dx} + p_2 f \right]$$

$$g p_1 \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(g p_1 f) - f \frac{d}{dx}(g p_1) = \frac{d}{dx}(g p_1 f) - f p_1' g - f p_1 g'$$

$$g p_0 \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(g p_0 \frac{df}{dx}\right) - \frac{df}{dx}\frac{d}{dx}(g p_0)$$
$$= \frac{d}{dx}\left(g p_0 \frac{df}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(f \frac{d}{dx}(g p_0)\right) + f \frac{d^2(g p_0)}{dx^2}$$
$$= \frac{d}{dx}\left(g p_0 f' - f p_0 g' - f p_0' g\right) + f\left(g'' p_0 + 2 g' p_0' + g p_0''\right)$$

$$= \Big[g(p_1 - p_0') f + g p_0 f' - f p_0 g' \Big]_a^b + \int_a^b dx\, f \left[p_0 \frac{d^2 g}{dx^2} + (2p_0' - p_1) \frac{dg}{dx} + (p_0'' - p_1' + p_2) g \right]$$

Das Integral hat die gewünschte Form, falls $\begin{cases} 2p_0' - p_1 = p_1 \\ p_0'' - p_1' + p_2 = p_2 \end{cases}$,
d.h. $\boxed{p_0' = p_1}$.

Falls der Randterm wegfällt (mehr dazu später), gilt also $\langle g | \mathcal{L} f \rangle = \langle \mathcal{L} g | f \rangle$, und $\mathcal{L}$ wird selbstadjungiert genannt.

Allgemeine Form des selbstadjungierten Operators

Seite 49 mit $p_0' = p_1$: $\mathcal{L} = p_0 \frac{d^2}{dx^2} + p_0' \frac{d}{dx} + p_2$.

Wenn wir $p_0 \to p$ und $p_2 \to q$ setzen, ist also

$$\boxed{\mathcal{L} f(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{df}{dx}\right] + q(x) f(x)} .$$

Beispiele: EMTP $\to$ Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:

$$\nabla^2 f = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}}_{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right]} + \frac{1}{r^2}\left[\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}}_{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right]$$

Bemerkungen:

* Ob $\mathcal{L}$ selbstadjungiert ist oder nicht, hängt von der gewählten Klasse der Funktionen ab, insbesondere von den Randbedingungen bei $x = a$ und $x = b$.

* Auch ein anderer $\mathcal{L}$, mit $p_0' \neq p_1$, kann in die gewünschte Form gebracht werden: Multiplikation durch $\frac{1}{p_0(x)} \exp\left[\int^x dt \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\right]$ ergibt nämlich

$$\frac{1}{p_0(x)} \exp\left[\int^x dt \frac{p_1}{p_0}\right] \left\{ p_0 f'' + p_1 f' + p_2 f \right\}$$

$$= \exp\left[\int^x dt \frac{p_1}{p_0}\right] f'' + \frac{p_1}{p_0}\exp\left[\int^x dt \frac{p_1}{p_0}\right] f' + \frac{p_2}{p_0}\exp\left[\int^x dt \frac{p_1}{p_0}\right] f$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{ \underbrace{\exp\left[\int^x dt \frac{p_1}{p_0}\right]}_{=:\, p(x)} f' \right\} + \underbrace{\frac{p_2}{p_0}\exp\left[\int^x dt \frac{p_1}{p_0}\right]}_{=:\, q(x)} f$$

(Hier spielt die Voraussetzung $p_0(x) \neq 0$ eine Rolle.)

* Wie ist es bei Differenzialoperatoren erster Ordnung? Setze $p_0(x) \to 0$ auf Seite 49

$$\Rightarrow \int_a^b dx\, g\left[p_1 \frac{df}{dx} + p_2 f\right] = \left[g p_1 f\right]_a^b + \int_a^b dx\, f\left[-p_1\frac{dg}{dx} + (-p_1' + p_2) g\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = -p_1 \\ -p_1' = 0 \end{cases} \Rightarrow p_1 = 0 \Rightarrow \text{nicht möglich!}$$

Eigenwerte und Eigenfunktionen

Man würde erwarten: $\mathcal{L} f(x) = \lambda f(x)$, $f(x) \neq 0$ (vgl. Seite 26).

Dies sei ein wenig verallgemeinert, und mit neuer Notation ausgedrückt:

Definition: Wenn es eine nichttriviale Funktion, $u(x) \neq 0$, gibt, die die gegebenen Randbedingungen sowie die Differenzialgleichung

$$\mathcal{L} u(x) + \lambda w(x) u(x) = 0$$

erfüllt, dann wird $u(x)$ die Eigenfunktion zum Eigenwert λ genannt. Die Funktion $w(x)$, genannt die Gewichtsfunktion, sei positiv, $w(x) > 0$, außer einzelner Punkte mit $w(x) = 0$.

Bemerkungen:

* Mit Notation von Seite 50:

$$\underbrace{\frac{1}{w}\left\{-\frac{d}{dx}\, p\, \frac{d}{dx} - q\right\}}_{\text{„Sturm-Liouville-Operator"}} u(x) = \lambda u(x) .$$

* Es gibt keinen eindeutigen Unterschied zwischen $q(x)u(x)$ und $\lambda w(x) u(x)$. Normalerweise wird der „bekannte" Teil von $\mathcal{L}$ ohne Ableitungen als $q(x)$ interpretiert, während $\lambda w(x)$ den „zu bestimmenden" Eigenwert enthält.

* Wie wir im Kapitel 2.5 sehen werden, sind die Eigenfunktionen orthogonal zueinander nur wenn die Gewichtsfunktion als Teil der Definition des Skalarprodukts betrachtet wird:

$$\langle u_i | u_j \rangle := \int_a^b dx\, w(x)\, u_i(x)\, u_j(x) .$$

  So könnte auch die Betrachtung aus Seite 49 neu interpretiert werden:

$$\langle g | \mathcal{L} f \rangle = \int_a^b dx\, w(x)\, g(x) \underbrace{\frac{1}{w(x)} \mathcal{L}}_{-(\text{Sturm-Liouville-Operator})} f(x) .$$

Randbedingungen

Randterm aus Seite 49 (mit $p_0 \to p$): $[g p f' - f p g']_a^b$.

Dieser verschwindet, wenn

* alle Funktionen bei $x=a$ und $x=b$ verschwinden: $f(b)=f(a)=g(b)=g(a)=0$.
  Dann spricht man von Dirichlet-Randbedingungen.

* alle Ableitungen bei $x=a$ und $x=b$ verschwinden: $f'(b)=f'(a)=g'(b)=g'(a)=0$.
  Dann spricht man von von Neumann-Randbedingungen.

* eine allgemeinere Möglichkeit: $\cos(\alpha)\,\psi(a) + \sin(\alpha)\,p(a)\,\psi'(a) = 0$,
  $\cos(\beta)\,\psi(b) + \sin(\beta)\,p(b)\,\psi'(b) = 0$,

  wobei $\psi = f, g$ und die Winkel α, β frei gewählt werden können.

  Denn: $$g(a)\,p(a)\,f'(a) - f(a)\,p(a)\,g'(a)$$
  $$= g(a)\left(-\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right)f(a) - f(a)\left(-\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right)g(a) = 0.$$

* eine andere Möglichkeit ist, dass eine Kürzung zwischen a und b stattfindet, z.B. wenn die Funktionen und ihre Ableitungen periodisch sind. (Genauer: $\psi(b)=\psi(a)$ & $p(b)\psi'(b) = p(a)\psi'(a)$.)

Beispiel: $\mathcal{L} := \frac{d^2}{dx^2}$; $a := 0$; $b := 2\pi$; $w(x) := 1$

$$\leadsto \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$$

(i) $\lambda > 0 \Rightarrow u = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$.

* Dirichlet: $u(0) = A = 0$
  $u(2\pi) = B\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

* periodisch: $$\begin{cases} u(2\pi) = u(0) \Leftrightarrow & A = A\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + B\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) \\ u'(2\pi) = u'(0) \Leftrightarrow & B = B\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - A\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) \end{cases}$$

  Eine nichttriviale Lösung existiert falls
  $$\det\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1 & \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) & \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1 \end{pmatrix} = 0,$$
  d.h. $[\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1]^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}2\pi) = 0$,
  d.h. $\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) = 0 \wedge \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) = 1$,
  d.h. $\sqrt{\lambda} = n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\lambda < 0 \Rightarrow u = A e^{-\sqrt{|\lambda|}x} + B e^{\sqrt{|\lambda|}x}$

* Dirichlet: $u(0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A$
  $u(2\pi) = A\left(e^{-\sqrt{|\lambda|}2\pi} - e^{\sqrt{|\lambda|}2\pi}\right) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ↯
  Keine negativen Eigenwerte existieren!

— o —