2.3 Lineare Integraltransformationen [Arfken 15.1-5]

Nochmal die Logik der Fourier-Reihe (Kapitel 2.2):

$f(x)$ $\Leftrightarrow$ Funktion bzw. „Vektor" in der „Standardbasis", mit x als „Index"; $|f\rangle_x$.

$e^{i\frac{2\pi n x}{L}}$ $\Leftrightarrow$ Basisvektoren einer anderen orthogonalen Basis (nicht unbedingt normiert), d.h. $|v_n\rangle_x$.

$$f_F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n x}{L}} \quad \Leftrightarrow \quad |f_F\rangle_x = \sum_n \underbrace{\langle \hat{v}_n | f\rangle}_{\text{„Komponenten" von } f \text{ in Fourier-Basis}} |\hat{v}_n\rangle_x .$$

Es gibt aber auch noch weitere mögliche orthogonale Basen, abhängig davon welche „Klasse" von Funktionen betrachtet wird.

Wir werden später eine allgemeine Methode zur Erzeugung von Basen diskutieren (als Eigenfunktionen von Differenzialoperatoren), aber hier Beispiele:

* Fourier-Transformation ($f(x)$ nicht periodisch; $-\infty < x < \infty$):

$$c_n \to \tilde{f}(k) := \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}}_{\text{entspricht } \langle v_n | f\rangle} \quad ; \quad k \in \mathbb{R} .$$

* Laplace-Transformation ($f(x)$, $x \geq 0$, darf wachsen bei $x \to \infty$):

$$\tilde{f}(k) := \int_0^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-kx} .$$

* Mellin-Transformation:

$$\tilde{f}(k) := \int_0^{\infty} dx\, f(x)\, x^{k-1} .$$

Alle sind lineare Transformationen: $\alpha f(x) + \beta g(x) \to \alpha \tilde{f}(k) + \beta \tilde{g}(k)$.

Die Idee ist immer dieselbe:

$$\begin{tikzcd}
\text{Wahlbasis} \arrow[r, "\text{lösbares}", "\text{Problem}"'] & \text{Wahlbasis} \arrow[d, "\text{Rücktransformation}"] \\
\text{Standardbasis} \arrow[u, "\text{Transformation}"] \arrow[r, "\text{schwieriges}", "\text{Problem}"'] & \text{Standardbasis}
\end{tikzcd}$$

Dabei liegt das Problem nicht selten bei der Konstruktion der Rücktransformation. Mathematisch gesehen vermutet die ganze Prozedur natürlich auch die Vollständigkeit der Wahlbasis.

Genaueres zur Fourier-Transformation

Funktionenraum: Der Funktionenraum $L_p(\mathbb{R}^n)$ (Lebesgue 1875–1941) bestehe aus reell- oder komplexwertigen Funktionen des $\mathbb{R}^n$, die eine endliche „L_p-Norm" besitzen:

$$\|f\|_{L_p} := \left\{ \int d^n\vec{x}\, |f(\vec{x})|^p \right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Existenz der Transformation: Wenn $f(\vec{x}) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, ist auch $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}) \in L_1(\mathbb{R}^n)$. In diesem Fall existiert die Fourier-Transformierte:

$$\tilde{f}(\vec{k}) := \int d^n\vec{x}\, f(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \;;$$

denn $|\tilde{f}(\vec{k})| \le \int d^n\vec{x}\, |f(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}| = \|f\|_{L_1} < \infty$.

Existenz der Rücktransformation: Falls auch $\tilde{f}(\vec{k}) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, läßt sich die Fourier-Transformation umkehren, und es gilt

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^n\vec{k}}{(2\pi)^n}\, \tilde{f}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} .$$

Diese Aussage wird hier nicht ordentlich gezeigt,* aber einen „Physikerbeweis" sollte man kennen.

* Eine ähnliche Strategie wie auf Seiten 43-44 kann benutzt werden; mehr dazu im Kapitel 2.6.

Sei der Einfachheit halber $n=1$. Es gilt (vgl. Seite 42):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik(x-y)} \;:\stackrel{!}{=}\; \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty dk\, e^{k[i(x-y)-\varepsilon]} + \int_0^\infty dk\, e^{k[i(y-x)-\varepsilon]} \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\frac{e^{k[i(x-y)-\varepsilon]}}{i(x-y)-\varepsilon} + \frac{e^{k[i(y-x)-\varepsilon]}}{i(y-x)-\varepsilon} \right]_0^\infty \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon - i(x-y)} + \frac{1}{\varepsilon + i(x-y)} \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi[\varepsilon^2 + (x-y)^2]} \underset{\text{Seite 39}}{=} \delta(x-y) .$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \delta(x-y)\, f(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik(x-y)}\, f(y)$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \Big\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, e^{-iky}}_{\text{Transformation} \Rightarrow \tilde{f}(k)} \Big\}}_{\text{Rücktransformation} \Rightarrow f(x).} \quad !$$

<u>Beispiel:</u> Die Diffusionsgleichung $\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ soll mit der Anfangsbedingung $\phi(0,x) := \delta(x)$ gelöst werden.

(i) Fourier-transformiere Gleichung und Anfangsbedingung:

$$* \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx} \partial_t \phi(t,x)} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx} \, D \partial_x^2 \phi(t,x)}$$

$\phi(t,x)$ behandelt wie eine „Testfunktion" (vgl. Seite 39), im Sinne dass partielle Integrationen immer erlaubt sind

$$\Rightarrow \quad \partial_t \tilde{\phi}(t,k) = - D k^2 \tilde{\phi}(t,k)$$

$$* \quad \phi(0,x) = \delta(x)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\phi}(0,k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx} \delta(x) = 1 \, .$$

(ii) Löse Problem in der Fourier-Basis:

$$\tilde{\phi}(t,k) = \tilde{\phi}(0,k) \, e^{-tDk^2} = e^{-tDk^2}$$

(iii) Rücktransformiere in die Standardbasis:

$$\phi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\phi}(t,k) \, e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-tD\left(k^2 - \frac{ikx}{tD}\right)}$$

Schreibe $\quad k^2 - \frac{ikx}{tD} = \left(k - \frac{ix}{2tD}\right)^2 + \frac{x^2}{4t^2D^2} \, .$

$$\Rightarrow \quad \phi(t,x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4tD}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-tD\left(k - \frac{ix}{2tD}\right)^2}$$

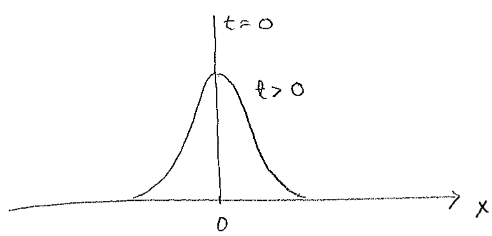
Substituiere $\quad k = k' + \frac{ix}{2tD} \quad$ (mehr dazu im Kapitel 4!)

und benutze $\quad \int_{-\infty}^{\infty} dk' \, e^{-tD(k')^2} = \sqrt{\frac{\pi}{tD}} \, .$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t D}} \, e^{-\frac{x^2}{4tD}}} \, .$$

Bemerkung: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \phi(t,x) \overset{!}{=} \tilde{\phi}(t,0) = 1$ ist zeitunabhängig!

Skizze:



Allgemeine Struktur der Basistransformationen

Bei einem Vektor in der Standardbasis: $u_i = (\vec{u})_i = \vec{e}_i \cdot \vec{u}$.
Analog bei einer Funktion in der „Standardbasis": $|f\rangle_x =: \langle x|f\rangle$.

Basisfunktionen einer anderen Basis werden durch eine andere „Koordinate" numeriert, z.B. n (Seite 41) oder im Allgemeinen k (Seite 45).

Bei der Standardbasis: $\langle x|y\rangle := \delta(x-y)$ „Orthonormierung"
$\int dx\, |x\rangle\langle x| := id = \mathbb{1}$ „Vollständigkeit"*

* Begründung:
$$\langle f \overset{\mathbb{1}}{|} g\rangle = \int dx \langle f|x\rangle\langle x|g\rangle = \int dx\, f^*(x) g(x)$$

Diese passen überein:
$$f(y) = \langle y \underset{\mathbb{1}}{|} f\rangle = \int dx\, \langle y|x\rangle\langle x|f\rangle = \int dx\, \delta(x-y)\, f(x) \quad \text{OK!}$$

Bei einer anderen Basis:
$$\langle k|q\rangle = \delta(k-q)$$
$$\int đk\, |k\rangle\langle k| = id = \mathbb{1}$$

evtl. Normierung

Die Normierungen müssen wieder übereinpassen:
$$\tilde{f}(q) := \langle q \underset{\mathbb{1}}{|} f\rangle = \int đk\, \langle q|k\rangle\langle k|f\rangle = \int đk\, \delta(q-k)\, \tilde{f}(k),$$
d.h. $\int đk\, \delta(q-k) = 1$.

In einem Basiswechsel wird eine „Übergangsamplitude", $\langle x|k\rangle$, gebraucht, und ihre Normierung muß so fixiert werden, dass
$$\delta(x-y) = \langle x \underset{\mathbb{1}}{|} y\rangle = \int đk\, \langle x|k\rangle\langle k|y\rangle = \int đk\, \langle x|k\rangle\langle y|k\rangle^*$$
gilt. Zum Beispiel: $đk := \frac{dk}{2\pi} \Rightarrow \langle x|k\rangle = e^{ikx}$, vgl. Seite 46.

Mit dieser Notation funktioniert alles „automatisch":

Transformation: $\langle k \underset{\boxed{\mathbb{1} = \int dx\, |x\rangle\langle x|}}{|} f\rangle = \int dx\, \langle k|x\rangle\langle x|f\rangle$
$$= \int dx\, \langle x|f\rangle \langle x|k\rangle^*$$

Rücktransformation: $\langle x \underset{\boxed{\mathbb{1} = \int đk\, |k\rangle\langle k|}}{|} f\rangle = \int đk\, \langle x|k\rangle\langle k|f\rangle$
$$= \int đk\, \langle k|f\rangle \langle x|k\rangle.$$

Die genaue Form von $đk$ und $\langle x|k\rangle$ hängt von der Wahl der Basis ab.

— o —