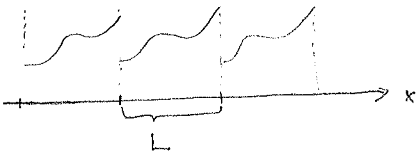
2.2 Fourier-Reihe als Beispiel [Arfken 14.1-2]

Zur Erinnerung: Sei $f(x) \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) eine periodische Funktion, d.h. $f(x+L) = f(x) \;\forall\, x \in \mathbb{R}$. Die entsprechende Fourier-Reihe lautet $f_F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{2\pi n x}{L}}$, mit Koeffizienten



$$c_n = \frac{1}{L}\int_P dx\, f(x)\, e^{-i\frac{2\pi n x}{L}},$$

wobei P eine beliebige Periode bezeichnet: $P = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x_0 \leq x < x_0 + L\}$.

Das Ziel ist, diese Struktur in der Sprache der Funktionenräume zu verstehen.

Konventionen: Substituiere $x = x_0 + \frac{L}{2\pi} y$; $dx = \frac{L}{2\pi} dy$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_F(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{\frac{i2\pi n x_0}{L}}\, e^{iny} =: \phi_F(y) \\ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dy\, \phi(y)\, e^{-\frac{i2\pi n x_0}{L}}\, e^{-iny} \end{cases}$$

Sei $\gamma_n := c_n\, e^{\frac{i2\pi n x_0}{L}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi_F(y) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n\, e^{iny} & ; \quad \phi(y+2\pi) = \phi(y). \\ \gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dy\, \phi(y)\, e^{-iny} \end{cases}$$

Behauptung: Die Funktionen $\{e^{iny}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, bilden eine orthogonale Menge auf dem Intervall $\{y \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq y < 2\pi\}$.

Für eine besondere Klasse von Funktionen ist diese Menge auch vollständig. In diesem Fall gilt $\phi_F(y) = \phi(y) \;\forall\, y$.

Für eine größere Klasse von Funktionen gilt $\|\phi_F - \phi\| = 0$, wobei $\|\ldots\|$ eine bestimmte Norm bezeichnet. Obwohl im diesem Fall ϕ_F und ϕ nicht unbedingt punktweise gleich sind, kann auch dann in der Praxis ϕ durch ϕ_F ersetzt werden. Dies entspricht der Darstellung

$$|\phi\rangle = |\phi_F\rangle = \sum_n \frac{1}{\langle v_n | v_n\rangle} \langle v_n | \phi\rangle\, |v_n\rangle,$$

wobei wir bei Funktionen die Dirac-Notation $|v_n\rangle$ statt $\vec{v}_n$ benutzen (vgl. Seite 16).

Orthogonalität: Das Skalarprodukt sei definiert wie auf Seite 37:

$$\langle f | g \rangle := \int_0^{2\pi} dy\, f^*(y)\, g(y).$$

jetzt mit Dirac-Notation

Es folgt: $\langle v_n | v_m \rangle = \int_0^{2\pi} dy\, e^{-iny} e^{imy}$

$$= \begin{cases} 2\pi, & m = n \\ \frac{1}{i(m-n)} \left[e^{i(m-n)y} \right]_0^{2\pi} = 0, & m \neq n, \end{cases}$$

weil $e^{i2\pi(m-n)} = 1 \quad \forall\, m,n \in \mathbb{Z}$. Damit ist also

$$\frac{1}{\langle v_n | v_n \rangle} \langle v_n | \phi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dy\, \phi(y) e^{-iny}.$$

(Wenn wir die Basisvektoren neu normieren,

$$|\hat{v}_n\rangle := \frac{1}{\langle v_n | v_n \rangle^{1/2}} |v_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iny},$$

gilt sogar Orthonormalität: $\langle \hat{v}_n | \hat{v}_m \rangle = \delta_{nm}$.)

Vollständigkeit (Physikerbeweis):

Betrachte die Summe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |v_n\rangle_x \langle v_n|_y$, vgl. Seite 38. Diese ist natürlich nicht konvergent. Aber mit einem kleinen Trick geht es schon:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(x-y)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{in(x-y)} + \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{in(x-y)}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{in(x-y)} + e^{-in(x-y)} \right]$$

$$\overset{!}{:=} 1 + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{[i(x-y)-\varepsilon]n} + e^{[i(y-x)-\varepsilon]n} \right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$\overset{!}{=} -1 + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \frac{1}{1-e^{i(x-y)-\varepsilon}} + \frac{1}{1-e^{i(y-x)-\varepsilon}} \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \frac{1}{1-e^{i(x-y)-\varepsilon}} + \frac{1 - 1 + e^{i(y-x)-\varepsilon}}{1-e^{i(y-x)-\varepsilon}} \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \frac{1}{1-e^{i(x-y)-\varepsilon}} - \frac{1}{1-e^{i(x-y)+\varepsilon}} \right\}$$

Falls $x - y \neq 2\pi n$, ist $e^{i(x-y)} \neq 1$; Limes existiert; und die zwei Terme kürzen sich.

Falls $|x-y| \approx 0 \mod 2\pi$, können wir Taylor-entwickeln:

$$\ldots = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \frac{1}{\varepsilon - i(x-y)} + \frac{1}{\varepsilon + i(x-y)} \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (x-y)^2} \right\}$$

Seite 39

$$\overset{!}{=} 2\pi\, \delta(x-y).$$

Mit Normierung also $\sum_n |\hat{v}_n\rangle_x \langle \hat{v}_n|_y = \delta(x-y \mod 2\pi)$, und

$$\phi(x) = \int_0^{2\pi} dy\, \delta(x-y)\, \phi(y) = \sum_n \langle \hat{v}_n | \phi \rangle\, |\hat{v}_n\rangle_x = |\phi_F\rangle_x\ !$$

Genaueres zur Vollständigkeit

* Gleichheit von $\phi_F(x)$ und $\phi(x)$ gilt u.a. wenn ϕ glatt ist. In der Praxis ist dies aber oft zu restriktiv.

* Definiere $\phi_F^{(k)}(y) := \sum_{n=-k}^{k} \gamma_n e^{iny}$.

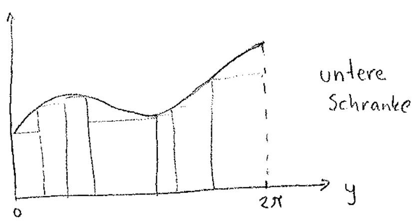
* Man sagt, dass die Folge $\phi_F^{(k)}$ „im quadratischen Mittel" gegen ϕ konvergiert, falls
$$\lim_{k\to\infty} \| \phi - \phi_F^{(k)} \|^2 = 0,$$
wobei die Norm wie auf Seite 42 definiert ist:
$$\| \phi - \phi_F^{(k)} \|^2 = \langle \phi - \phi_F^{(k)} | \phi - \phi_F^{(k)} \rangle = \int_0^{2\pi} dy \, | \phi(y) - \phi_F^{(k)}(y) |^2 .$$
Wenn also $\lim_{k\to\infty} \phi_F^{(k)}(y) = \phi(y) \ \forall y$, dann auch im quadratischen Mittel, aber die Umkehrung gilt nicht.

* Es gilt:
$$0 \le \| \phi - \phi_F^{(k)} \|^2 = \langle \phi - \sum_{n=-k}^{k} \gamma_n v_n \, | \, \phi - \sum_{m=-k}^{k} \gamma_m v_m \rangle$$
$$= \|\phi\|^2 - \sum_{n=-k}^{k} \gamma_n^* \underbrace{\langle v_n | \phi \rangle}_{2\pi \gamma_n} - \sum_{m=-k}^{k} \gamma_m \underbrace{\langle \phi | v_m \rangle}_{2\pi \gamma_m^*} + \sum_{n,m=-k}^{k} \gamma_n^* \gamma_m \underbrace{\langle v_n | v_m \rangle}_{2\pi \delta_{nm}}$$
$$= \|\phi\|^2 - 2\pi \sum_{n=-k}^{k} |\gamma_n|^2 ,$$
d.h. $$\sum_{n=-k}^{k} |\gamma_n|^2 \le \frac{1}{2\pi} \|\phi\|^2 .$$

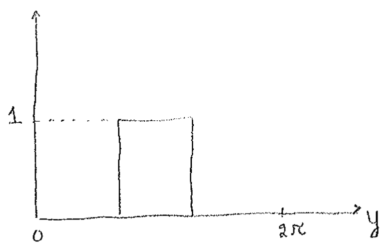
* Wenn also aus der Ungleichung im Limes $k\to\infty$ eine Gleichung wird, liegt Konvergenz im quadratischen Mittel vor.

* Eine mögliche Strategie für den Beweis:

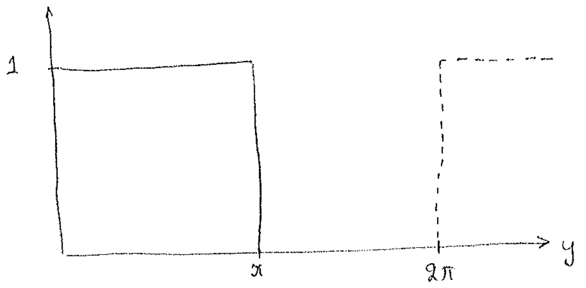
(i) Beschränke ϕ von beiden Seiten durch eine Linearkombination orthogonaler „Treppenfunktionen".



(ii) Zeige Gleichung explizit für eine gegebene „Basis-Treppenfunktion".



Beispiel:



$$\phi(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y < \pi \\ 0, & \pi \le y < 2\pi \end{cases}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dy\, \phi(y)\, e^{-iny} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-iny}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \\ \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-in}\left[e^{-iny}\right]_0^{\pi} = \frac{i}{2\pi n}\left[(-1)^n - 1\right], & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 = \frac{1}{4} + 2\cdot\sum_{n=1,3,5,\dots}\frac{1}{\pi^2 n^2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2\pi^2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{\frac{\pi^2}{6}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

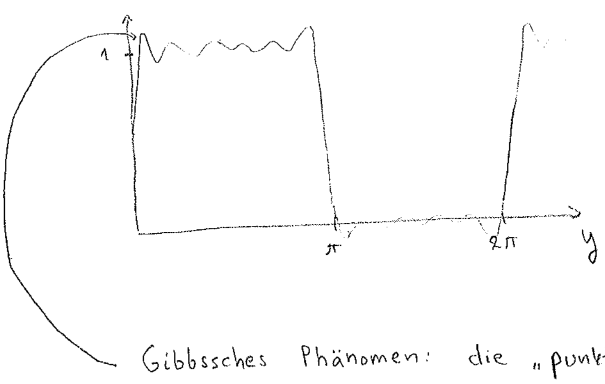
Und: $\frac{1}{2\pi}\|\phi\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dy = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Ok!

Warnung:

$$\phi_F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma_n e^{iny} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{2\pi n}\left[(-1)^n - 1\right]\left(e^{iny} - e^{-iny}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1,3,5,\dots}\frac{2}{\pi n}\sin(ny)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin(y) + \frac{1}{3}\sin(3y) + \frac{1}{5}\sin(5y) + \dots\right]$$



Gibbssches Phänomen: die „punktweise" Diskrepanz wird nicht kleiner bei $k \to \infty$, aber das problematische Gebiet wird schmaler, und trägt deshalb zum Integral nicht bei.