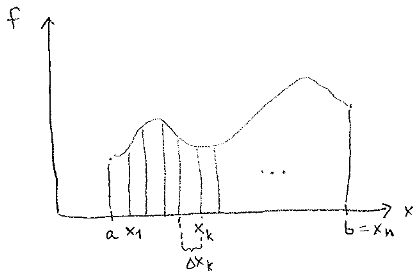
2. Funktionenräume

2.1 Grundbegriffe [Arfken 1.15]

Wenn wir Funktionen auf einem endlichen Intervall betrachten, und den Raum „diskretisieren" (~wie bei der Definition des bestimmten Integrals), können Funktionen als Spaltenvektoren visualisiert werden:



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f(a) \\ \vdots \\ f(x_k) \\ \vdots \\ f(b) \end{pmatrix}.$$

Falls $f(x) \in \mathbb{K}$, bilden solche Funktionen eine abelsche Gruppe, mit Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),$$

und eine Skalarmultiplikation kann auch definiert werden, als

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x).$$

Die Menge solcher Funktionen bildet also einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Unter Umständen kann sogar ein hermitesches Skalarprodukt (vgl. Seite 33) definiert werden. In der Tat schlägt das Standard-Skalarprodukt Folgendes vor:

$$\lim_{\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f^*(x_i) g(x_i) \xrightarrow{\text{falls Limes existiert}} \int_a^b dx \, f^*(x) g(x) =: \langle f, g \rangle.$$

Wenn alle solche Integrale existieren, insbesondere auch

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b dx \, |f(x)|^2 < \infty,$$

sind alle benötigten Axiome erfüllt. Man spricht vom unitären Vektorraum quadratisch intergrierbarer Funktionen, $L_2([a,b])$.

(Mathematische Ergänzung: Auf Seite 33 wurde das Skalarprodukt durch eine Sesquilinearform $V \times V \to \mathbb{C}$ definiert, mit $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda^* \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ und $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^*$. Man spricht dann auch vom dualen Vektorraum V^*, bestehend aus Elementen „$\langle \vec{u}, \ \rangle$", d.h. aus linearen Abbildungen $V \to \mathbb{C}$.)

Wenn wir einen Vektorraum mit einem Skalarprodukt haben, möchten wir dort gerne eine <u>orthonormierte Basis</u> definieren.

Verlangt wird (vgl. Seite 6, 15):

* $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$, d.h. <u>Orthonormalität</u> ($\Rightarrow$ <u>lineare Unabhängigkeit</u>)
* $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = V$, oft genannt <u>Vollständigkeit</u> (vgl. Seite 16).

Was bedeuten diese Begriffe in Funktionenräumen?

<u>Orthonormalität</u>: Falls V zwar unendlichdimensional aber noch „abzählbar" ist, d.h. mit einer diskreten Menge von Basisfunktionen, bleibt $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$, $i,j \in \mathbb{N}$ unverändert. Falls die Basis „überabzählbar" ist, muss etwas anderes getan werden.

<u>Vollständigkeit</u>: Auch im abzählbaren Fall ist unklar was $n \to \infty$ impliziert. Mathematisch (vgl. Seite 16):

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{v}_i, \vec{u} \rangle \vec{v}_i \qquad \forall\ \vec{u} \in V$$

Benutze Standard-Skalarprodukt und schreibe in Komponentenform bzgl. Standardbasis:

$$(\vec{u})_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\vec{v}_i)^*_k (\vec{u})_k (\vec{v}_i)_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i)_j (\vec{v}_i)^*_k \right\} (\vec{u})_k \qquad \forall\ \vec{u} \in V,\ \forall\ j \in \{1, \dots, n\}.$$

Nur möglich falls

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i)_j (\vec{v}_i)^*_k = \delta_{jk}.}$$

Bei Funktionen spielt aber x die Rolle des Index (vgl. Skizze auf Seite 37). Man braucht also

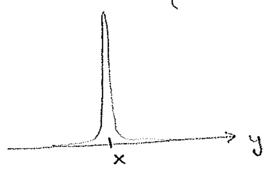
$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) f_i^*(y) = „\delta_{x,y}" = ?$$

Die Bedeutung der Orthonormalität im überabzählbaren Fall sowie die der Vollständigkeit in allen unendlichdimensionalen Fällen, können <u>in der Praxis</u> durch die Einführung der <u>Diracschen Deltafunktion</u> deutlich gemacht werden.

Dirac - δ

Skizze: Kronecker - δ : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$; $\sum_k \delta_{ik} = 1 \ \forall i$.

↪ Dirac - δ : $\delta(x-y) = \begin{cases} ?, & x=y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$; $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-y) = 1 \ \forall y$.



Beispiele: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x)$ mit

* $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$

* $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right), & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$

* $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$

* $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\, e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}$

* $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \overset{!}{=} \frac{1}{\pi}\, \mathrm{Im}\, \frac{1}{x - i\varepsilon}$.

Definition: Sei $T(x)$ eine glatte (d.h. beliebig oft differenzierbare) Funktion, die außerhalb eines beschränkten Intervalls verschwindet.*
Die Dirac-δ ist eine „Distribution", die durch ihren Einfluß auf Testfunktionen definiert wird:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ T(x)\ \delta(x-y) \ := \ T(y)$$

Ihre Ableitungen folgen durch partielle Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ T(x)\ \delta'(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{d}{dx}\big(T(x)\,\delta(x-y)\big) - T'(x)\,\delta(x-y)\right]$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} dx\ T'(x)\ \delta(x-y) = -T'(y).$$

Ihr Integral ist die Stufenfunktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ T(x)\ \Theta'(x-y) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\ T'(x)\ \Theta(x-y)$$
$$:= -\int_{y}^{\infty} dx\ T'(x)$$
$$= -\big[T(x)\big]_y^{\infty} = T(y).$$

---

* Beispiele ?

Wichtige Eigenschaften:

(i) „$\delta(y-x) = \delta(x-y)$", denn

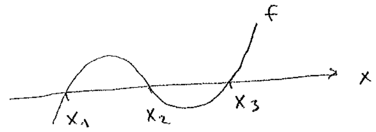
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta(y-x) \overset{\substack{x = y-x' \\ dx = -dx'}}{=} -\int_{\infty}^{-\infty} dx'\, T(y-x')\, \delta(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, T(y-x')\, \delta(x') = T(y) .$$

(ii) „$\delta(c(x-y)) = \frac{1}{|c|}\delta(x-y)$", denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta(c(x-y)) \overset{\substack{x = y + \frac{x'}{|c|} \\ dx = \frac{dx'}{|c|}}}{=} \frac{1}{|c|}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, T\left(y+\frac{x'}{|c|}\right) \delta\left(\frac{c}{|c|}x'\right)$$

$$\overset{(i)}{=} \frac{1}{|c|}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, T\left(y+\frac{x'}{|c|}\right)\delta(x') = \frac{1}{|c|}\, T(y) .$$

(iii) „$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$" wobei $\{x_i\}$ die Nullstellen sind: $f(x_i)=0$.



Denn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, \delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i-\Delta}^{x_i+\Delta} dx_i'\, T(x_i')\, \delta(f(x_i')) .$$

Taylor-Entwicklung um x_i:

$$f(x_i') = \underbrace{f(x_i)}_{0} + (x_i'-x_i)\, f'(x_i) + O(x_i'-x_i)^2$$

$$= (x_i'-x_i)\left[f'(x_i) + O(x_i'-x_i)\right] .$$

Substitution $x_i' = x_i + \varepsilon_i$ führt zu

$$\ldots = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\Delta}^{\Delta} d\varepsilon_i\, T(x_i+\varepsilon_i)\, \delta\Big(\varepsilon_i \underbrace{\left[f'(x_i) + O(\varepsilon_i)\right]}_{\neq 0 \text{ bei } \varepsilon_i \approx 0}\Big)$$

$$\overset{(ii)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(x_i)|}\, T(x_i) .$$

(iv) „$g(x)\,\delta(x-y) = g(y)\,\delta(x-y)$", denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, g(x)\, \delta(x-y) = T(y)\, g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x)\, g(y)\, \delta(x-y) .$$

Allgemeinere Darstellung:

Es gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \delta(x)$ falls $f_\varepsilon(x)$ integrierbar ist und Folgendes gilt:

(i) $\forall \delta > 0$ bleibt $\int_{-\delta}^{\delta} dx\, |f_\varepsilon(x)|$ beschränkt, d.h. unter einer von ε unabhängigen Schranke.

(ii) $\forall \delta > 0$ gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\delta}^{\delta} dx\, f_\varepsilon(x) = 1$.

(iii) $\forall 1 > \delta > 0$ konvergiert $f_\varepsilon(x)$ gleichmäßig gegen Null bei $\delta \leq |x| \leq \frac{1}{\delta}$.