1.8 Selbstadjungierte Operatoren [Arfken 3.3]

Im Falle eines reellen Vektorraums, in dem ein Skalarprodukt (Kap. 1.4) vorhanden ist, kann eine besonders wichtige Klasse von Operatoren (vgl. Seite 26) definiert werden, die immer diagonalisierbar sind (vgl. Seite 28).

Euklidischer Vektorraum := reeller Vektorraum V mit einem Skalarprodukt $\langle , \rangle$ (d.h. mit einer symmetrischen positiv definiten Bilinearform).

Orthogonale Operatoren: Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen euklidischen Vektorräumen heißt orthogonal, wenn

$$\langle \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) \rangle_W = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_V \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V$$

gilt. Bijektive orthogonale Abbildungen nennen wir orthogonale Transformationen. Wenn $W = V$, geht es um orthogonale Operatoren.

Bemerkungen:

* Jedes Skalarprodukt läßt sich aus der Norm rekonstruieren (Seite 13) $\Rightarrow$ $|\varphi(\vec{v})| = |\vec{v}| \ \forall\ \vec{v} \in V$ reicht als Definition orthogonaler Abbildungen!

* Eine ON-Basis wird in eine ON-Basis überführt:
$$\langle \varphi(\vec{v}_i), \varphi(\vec{v}_j) \rangle = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij} .$$

* Wenn V endlichdimensional, φ orthogonal bzgl. des inneren Produkts, und A die zugehörige Matrix ist, dann gilt
$$A^T A = A A^T = E , \quad \text{d.h.} \quad \boxed{A^T = A^{-1}} .$$
Beweis (vgl. Seite 20):
$$(A^T A)_{ij} = \sum_k (A^T)_{ik} (A)_{kj} = \sum_k a_{ki} a_{kj}$$
$$= \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = A(\vec{e}_i) \cdot A(\vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} .$$

* Die orthogonalen $n \times n$-Matrizen bilden mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung die orthogonale Gruppe
$$O(n) := \{ A \in \underbrace{M(n \times n, \mathbb{R})}_{\text{Menge von Matrizen}} \mid A^T A = E \} .$$
Es gilt (Seite 20): $|\det A| = 1$.
Die Untergruppe $SO(n) := \{ A \in O(n) \mid \det A = +1 \}$ nennt man die spezielle orthogonale Gruppe bzw. die Gruppe der Drehungen.

Selbstadjungierte Operatoren: Ein Operator $\varphi: V \to V$ auf einem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum heißt selbstadjungiert, wenn

$$\langle \vec{u}, \varphi(\vec{v}) \rangle = \langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V$$

gilt.

Bemerkung: Seite 25: Wenn $\varphi: V \to V$ und $(\vec{v}_1, .., \vec{v}_n)$ eine beliebige Basis ist, besitzen die zugehörigen Matrixelemente die Eigenschaft

$$\varphi(\vec{v}_i) = \sum_j a_{ji} \vec{v}_j \ .$$

Wenn $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ eine ON-Basis ist, folgt daraus

$$a_{ji} = \langle \vec{v}_j, \varphi(\vec{v}_i) \rangle \underset{\text{Symmetrie}}{=} \langle \varphi(\vec{v}_i), \vec{v}_j \rangle \underset{\text{selbstadjungiert}}{=} \langle \vec{v}_i, \varphi(\vec{v}_j) \rangle \overset{!}{=} a_{ij} ,$$

d.h. die Matrix ist symmetrisch : $\boxed{A^T = A}$.

Eigenschaften:

* Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines selbstadjungierten Operators stehen senkrecht aufeinander.

(Beweis: $\varphi(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ & $\varphi(\vec{v}) = \mu \vec{v}$

$$\Rightarrow \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \varphi(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \varphi(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \mu \vec{v} \rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \square .)$$

* Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators sind reell.

(Beweis: Sei A die zugehörige Matrix.
Fundamentalsatz der Algebra : im $\mathbb{C}^n$ gibt es Eigenwerte und Eigenvektoren (vgl. Kap. 1.7):

$$A(\vec{u} + i\vec{v}) = (\lambda + i\mu)(\vec{u} + i\vec{v}) \quad , \ \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\vec{u} = \lambda \vec{u} - \mu \vec{v} \\ A\vec{v} = \mu \vec{u} + \lambda \vec{v} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} - \mu \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\underset{\text{selbstadjungiert}}{=} \vec{u} \cdot A\vec{v} = \mu \vec{u} \cdot \vec{u} + \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Subtrahiere $\Rightarrow -\mu (\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}}_{>0}) = 0 \Rightarrow \mu = 0$

$$\Rightarrow A\vec{u} = \lambda \vec{u} \ \square .)$$

* Jeder selbstadjungierter Operator auf einem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum V liefert eine ON-Basis für V aus Eigenvektoren.

(Beweis: Induktiv nach Dimension.
Nehme $\vec{u}$ mit $A\vec{u} = \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, wie oben.
Sei $V_0 := \{ \vec{v} \in V \mid \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \}$.
V_0 ist $(n-1)$-dimensional, und „invariant":
$\langle \vec{u}, A\vec{v} \rangle = \langle A\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.
Induktionsannahme bei V_0 und Ergänzung durch $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \Rightarrow \square$.)

(i) Diagonalisierung symmetrischer Matrizen: (vgl. Seite 28)

Ist A eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix, d.h. ist $A^T = A$, so gibt es eine orthogonale Matrix $S \in O(n)$, d.h. $S^T = S^{-1}$, so dass $D := S^T A S$ in Diagonalgestalt ist.

Konstruktion: Sei $S := (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ eine laut Seite 30 konstruierte ON-Basis aus Eigenvektoren von A. Dann gilt:

$$(D)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (S^T)_{ik} (AS)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki} (AS)_{kj} ;$$

$$(AS)_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, s_{\ell j} .$$

Hier ist $s_{\ell j} = (\vec{u}_j)_\ell$; $\sum_\ell a_{k\ell} s_{\ell j} = (A\vec{u}_j)_k = \lambda_j (\vec{u}_j)_k$;

und folglich

$$(D)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{u}_i)_k \lambda_j (\vec{u}_j)_k = \lambda_j\, \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \lambda_j \delta_{ij} ,$$

d.h. $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

(ii) Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren:

Sei $\varphi : V \to V$ ein selbstadjungierter Operator auf einem endlichdimensionalen Vektorraum; $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ seine verschiedenen Eigenwerte ($r \leq \dim V$); und $P_k : V \to E_{\lambda_k}$ die Orthogonalprojektion auf den k-ten Eigenraum (vgl. Seite 28). Dann gilt

$$\varphi = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k .$$

Beweis: Ist $\vec{v} \in E_{\lambda_i}$, so gilt $P_k(\vec{v}) = \begin{cases} \vec{v}, & \text{falls } k = i \\ \vec{0}, & \text{sonst.} \end{cases}$

Daher haben φ und $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k$ dieselbe Wirkung auf Eigenvektoren und, weil es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, auf alle Vektoren $\Rightarrow \square$.

Bemerkung: Aussage (ii) ist allgemeiner als (i) ; (ii) gilt im Wesentlichen auch im unendlichdimensionalen Fall, wobei die Summe durch ein Integral über ein kontinuierliches Spektrum ergänzt werden muß.

Anwendung: Hauptachsentransformation quadratischer Formen:

Wenn B eine symmetrische Matrix ist, wurde die zugehörige quadratische Form auf Seite 13 als

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T B \vec{x} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i b_{ij} x_j$$

definiert. Physikalische Beispiele:

* Trägheitstensor in der klassischen Mechanik:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J \vec{\omega} \quad ;$$

kinetische Energie eines starren Körpers

Winkelgeschwindigkeit

$$(J)_{ij} = \int d^3\vec{x} \; \rho(\vec{x}) \left(\delta_{ij} |\vec{x}|^2 - x_i x_j \right)$$

Trägheitstensor

Massendichte

Koordinaten bzgl. Schwerpunkt

* Quadrupoltensor in der Elektrodynamik:

$$\phi = \dots + \frac{3}{2} \frac{\vec{x}^T Q \vec{x}}{|\vec{x}|^5} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^4}\right)$$

Skalarpotential

Monopol- und Dipolterme

$$(Q)_{ij} = \int d^3\vec{x} \; \rho(\vec{x}) \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} |\vec{x}|^2 \right)$$

Quadrupoltensor

Ladungsdichte

In jetziger Sprache: $q(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \varphi(\vec{x}) \rangle = \langle \varphi(\vec{x}), \vec{x} \rangle$.

Was wir also zu diesen Fällen gelernt haben ist, dass es eine orthogonale Transformation S existiert, wodurch T bzw. ϕ als Summe unabhängiger „Trägheitsmomente" bzw „Quadrupolmomente" dargestellt werden kann:

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T \underset{E = SS^T}{\uparrow} B \underset{E = SS^T}{\uparrow} \vec{x} = \vec{x}^T S \underbrace{S^T B S}_{D} \underbrace{S^T \vec{x}}_{=: \vec{x}'}$$

Hier $(\vec{x}')_i = \sum_j S^T_{ij} x_j = \sum_j S_{ji} x_j$,

und $(\vec{x}^T S)_i = \sum_j x_j S_{ji} \stackrel{!}{=} (\vec{x}')_i$

$$\Rightarrow \quad q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x}')_i \lambda_i (\vec{x}')_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2 .$$