

1.7 Eigenwerte und Eigenvektoren [Arkten 3.5]

Laut Kapitel 1.6 brauchen Vektoren nicht unbedingt im \mathbb{R}^n zu leben; im Allgemeinen benötigt man sogar „unendlich viel“ Information, um einen Vektor als Tabelle darzustellen (vgl. Kapitel 2, Funktionenräume).

Ein wichtiger Spezialfall ist allerdings, dass $V \subset \mathbb{K}^n$ gilt. In diesem Fall bleiben fast alle früheren Aussagen aus Kapiteln 1.1-5 unverändert; hier noch eine kurze Zusammenfassung dazu:

* Ein Vektor kann als $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i$ dargestellt werden; hier sind $v_i \in \mathbb{K}$ und $\vec{e}_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle}$, wobei „1“ das Einselement bzgl. Multiplikation von \mathbb{K} ist.

* Eine Matrix einer Abbildung bzgl. Standardbasis wird als $A := (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ definiert, mit $\vec{a}_i := A(\vec{e}_i)$.

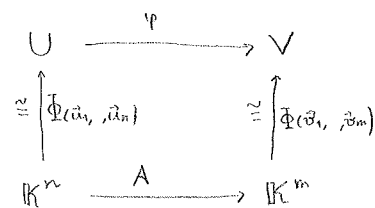
* Lineare Unabhängigkeit: $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \iff \lambda_i = 0 \ \forall i$, wobei „0“ das Einselement bzgl. Addition von \mathbb{K} ist.

* Wenn lineare Unabhängigkeit vorhanden ist und $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ den ganzen Vektorraum aufspannen, geht es um eine Basis.

* Matrix bzgl. beliebiger Basis:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)(\vec{e}_i) &= \vec{a}_i, \quad i=1, \dots, n \\ \Phi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)(\vec{e}_j) &= \vec{v}_j, \quad j=1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A := \Phi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)^{-1} \circ \varphi \circ \Phi(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$



Es gilt insbesondere:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\vec{a}_i) &= (\Phi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)^{-1} \circ A \circ \Phi(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n))(\vec{a}_i) \\
 &= \Phi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)(A(\Phi^{-1}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)(\vec{a}_i))) \\
 &= \Phi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)(A(\vec{e}_i)) = \Phi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)(a_{ji} \vec{e}_j) = a_{ji} \vec{v}_j.
 \end{aligned}$$

* Wenn $V \subset \mathbb{K}^n$ kann eine „Dimension“ definiert werden, als Anzahl der Basisvektoren.

* Die Hauptregeln bzgl. Determinante bleiben unverändert.

* Das Skalarprodukt kann zwar definiert werden, aber hier werden bestimmte Verallgemeinerungen nötig; mehr dazu im Kapitel 1.9.

* Das Kreuzprodukt dagegen kommt in der Regel nur bei $V = \mathbb{R}^3$ vor.

Operator : Wenn V ein \mathbb{K} -Vektorraum ist, wird eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$ ein "Operator" genannt.

Eigenraum: Ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert des Operators φ , wenn es einen Vektor $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ mit

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

gibt. Ein solcher Vektor heißt dann Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ . Zusammen mit dem Nullvektor bilden die Eigenvektoren zu λ (es gibt oft mehrere!) den Eigenraum

$$E_\lambda := \text{Kern}(\varphi - \lambda \text{id}_V) ;$$

wenn $\vec{v} \in E_\lambda$, gilt $(\varphi - \lambda \text{id}_V)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) - \lambda \vec{v} = \vec{0}$.

Die Dimension von E_λ heißt die "geometrische" Vielfachheit von λ .

Eine wichtige Frage (vgl. Seite 28) besteht darin, ob V als direkte Summe von Eigenräumen dargestellt werden kann. Hierzu zuerst einige Beobachtungen:

* Gilt $\lambda \neq \mu$, dann ist $E_\lambda \cap E_\mu = \{\vec{0}\}$, dh. $E_\lambda + E_\mu = E_\lambda \oplus E_\mu$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Beweis:} \quad \vec{v} \in E_\lambda \quad \wedge \quad \vec{v} \in E_\mu \\ \Leftrightarrow \varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad \wedge \quad \varphi(\vec{v}) = \mu \vec{v} \\ \Rightarrow \vec{0} = \varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{v}) = \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \vec{v} \quad \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \quad \square . \end{array} \right)$$

* Mit mehreren unterschiedlichen Eigenwerten ist dementsprechend $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$.

* Hat man je eine Basis $(\vec{v}_1^i, \dots, \vec{v}_{d_i}^i)$ für alle E_{λ_i} ($d_i := \dim E_{\lambda_i}$), so ergibt also

$$(\vec{v}_1^1, \dots, \vec{v}_{d_1}^1, \vec{v}_1^2, \dots, \vec{v}_{d_2}^2, \dots, \vec{v}_1^r, \dots, \vec{v}_{d_r}^r)$$

eine Basis für $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$.

* Weil diese eine Basis ist, dh. alle Basisvektoren linear unabhängig sind, so gilt

$$\sum_{i=1}^r \dim E_{\lambda_i} \leq \dim V.$$

* Wenn $V \subset \mathbb{K}^n$ besitzt der Operator also höchstens n verschiedene Eigenwerte!

Wie bestimmt man die Eigenwerte und Eigenvektoren in der Praxis?

(i) Man betrachte die entsprechende Matrix A.

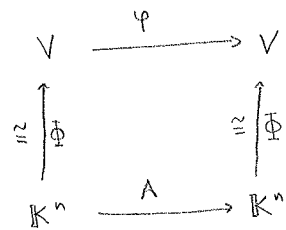
Diese besitzt dieselben Eigenwerte:

$$A = \Phi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi$$

$$\Leftrightarrow A \circ \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \circ \varphi$$

$$\Leftrightarrow (A \circ \Phi^{-1})(\vec{v}) = (\Phi^{-1} \circ \varphi)(\vec{v}) = \Phi^{-1}(\varphi(\vec{v})) \\ = \Phi^{-1}(\lambda \vec{v}) = \lambda \Phi^{-1}(\vec{v}),$$

d.h. $\Phi^{-1}(\vec{v})$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .



(ii) Sei $\vec{x} := \Phi^{-1}(\vec{v})$. Es folgt:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} \in \text{Kern}(A - \lambda E)$$

Seite 10: $\vec{x} \neq \vec{0}$ nur bei $\det(A - \lambda E) = 0!$

(iii) Man konstruiere also das charakteristische Polynom der Matrix A,

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda E).$$

Die Eigenwerte sind seine Nullstellen!

(iv) Um den entsprechenden Eigenraum, d.h. die Vektoren \vec{x} zu bestimmen, löse man das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}.$$

Die Anzahl unabhängiger Lösungen ergibt die geometrische Vielfachheit:
 $\dim E_\lambda = \dim \text{Kern}(A - \lambda E).$

(v) Die „abstrakten“ Eigenvektoren $\vec{v} \in V$ erhält man durch $\vec{v} = \Phi(\vec{x})$.

Bemerkung:

Ob eine gegebene Matrix Eigenwerte besitzt oder nicht, hängt von der Wahl von \mathbb{K} ab.

Bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ garantiert der Fundamentalsatz der Algebra (vgl. Seite 23), dass $P_A(\lambda)$ Nullstellen hat; bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist dies nicht unbedingt der Fall.

Diagonalisierbarkeit:

Ein Operator $\varphi: V \rightarrow V$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum heißt diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von φ besitzt.

Anders ausgedrückt: $V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$, oder

$$\dim V = \sum_{i=1}^r \dim E_{\lambda_i}.$$

Insbesondere ist jeder Operator mit $n = \dim V$ verschiedenen Eigenwerten diagonalisierbar.

Was bedeutet das in der Praxis?

Wenn φ diagonalisierbar ist, wähle \vec{v}_i , mit Eigenwerten λ_i , als die Basisvektoren von V . Es folgt:

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi\left(\sum_i x_i \vec{v}_i\right) = \sum_i x_i \varphi(\vec{v}_i) = \sum_i x_i \lambda_i \vec{v}_i,$$

d.h. sehr einfache Wirkung! Und auch:

$$\begin{aligned} A(\vec{e}_i) &= (\Phi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi)(\vec{e}_i) = \Phi^{-1}(\varphi(\Phi(\vec{e}_i))) \\ &= \Phi^{-1}(\varphi(\vec{v}_i)) = \Phi^{-1}(\lambda_i \vec{v}_i) = \lambda_i \Phi^{-1}(\vec{v}_i) \\ &= \lambda_i \vec{e}_i \quad (\text{keine Summen!}), \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Mathematische Ergänzung:

Sei V ein n -dimensionaler komplexer Vektorraum.

Dann ist das charakteristische Polynom von der Gestalt

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{m_i},$$

mit wohlbestimmten $m_i \geq 1$, welche die „algebraischen“

Vielfachheiten der Eigenwerte heißen. Es folgt

aus Linearfaktorzerlegung (Seite 23), dass $\sum_{i=1}^r m_i = n$

gilt. Im Allgemeinen erfüllen die geometrischen

Vielfachheiten $d_i = \dim E_{\lambda_i}$ die Ungleichungen $d_i \leq m_i$;

die Matrix ist diagonalisierbar wenn $d_i = m_i \forall i=1, \dots, r$.