1.7 Eigenwerte und Eigenvektoren [Arfken 3.5]

Laut Kapitel 1.6 brauchen Vektoren nicht unbedingt im $\mathbb{R}^n$ zu leben; im Allgemeinen benötigt man sogar „unendlich viel" Information, um einen Vektor als Tabelle darzustellen (vgl. Kapitel 2, Funktionenräume).

Ein wichtiger Spezialfall ist allerdings, dass $V \subset \mathbb{K}^n$ gilt. In diesem Fall bleiben fast alle früheren Aussagen aus Kapiteln 1.1-5 unverändert; hier noch eine kurze Zusammenfassung dazu:

* Ein Vektor kann als $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$ dargestellt werden; hier sind $v_i \in \mathbb{K}$ und $\vec{e}_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Stelle, wobei „1" das Einselement bzgl. Multiplikation von $\mathbb{K}$ ist.

* Eine Matrix einer Abbildung bzgl. Standardbasis wird als $A := (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ definiert, mit $\vec{a}_i := A(\vec{e}_i)$.

* Lineare Unabhängigkeit: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$, wobei „0" das Einselement bzgl. Addition von $\mathbb{K}$ ist.

* Wenn lineare Unabhängigkeit vorhanden ist und $(\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_n)$ den ganzen Vektorraum aufspannen, geht es um eine Basis.

* Matrix bzgl. beliebiger Basis:

$$\Phi_{(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)}(\vec{e}_i) = \vec{u}_i, \quad i = 1,\ldots,n$$
$$\Phi_{(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m)}(\vec{e}_j) = \vec{v}_j, \quad j = 1,\ldots,m$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] & V \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\cong"', "\Phi_{(\vec{u}_1, \vec{u}_n)}"] \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\cong"', "\Phi_{(\vec{v}_1, \vec{v}_m)}"] \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow A := \Phi^{-1}_{(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m)} \circ \varphi \circ \Phi_{(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)}$$

Es gilt insbesondere:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{u}_i) &= \left(\Phi_{(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m)} \circ A \circ \Phi^{-1}_{(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)} \right)(\vec{u}_i) \\ &= \Phi_{(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m)}\left(A\left(\Phi^{-1}_{(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)}(\vec{u}_i) \right) \right) \\ &= \Phi_{(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m)}(A(\vec{e}_i)) = \Phi_{(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m)}(a_{ji}\vec{e}_j) = a_{ji}\vec{v}_j . \end{aligned}$$

* Wenn $V \subset \mathbb{K}^n$ kann eine „Dimension" definiert werden, als Anzahl der Basisvektoren.

* Die Hauptregeln bzgl. Determinante bleiben unverändert.

* Das Skalarprodukt kann zwar definiert werden, aber hier werden bestimmte Verallgemeinerungen nötig; mehr dazu im Kapitel 1.9.

* Das Kreuzprodukt dagegen kommt in der Regel nur bei $V = \mathbb{R}^3$ vor.

— ∘ —

Operator: Wenn V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, wird eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ ein „Operator" genannt.

Eigenraum: Ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert des Operators φ, wenn es einen Vektor $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ mit

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

gibt. Ein solcher Vektor heißt dann Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ. Zusammen mit dem Nullvektor bilden die Eigenvektoren zu λ (es gibt oft mehrere!) den Eigenraum

$$E_\lambda := \mathrm{Kern}(\varphi - \lambda\, id_V) \quad ;$$

wenn $\vec{v} \in E_\lambda$, gilt $(\varphi - \lambda\, id_V)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) - \lambda \vec{v} = \vec{0}$.

Die Dimension von E_λ heißt die „geometrische" Vielfachheit von λ.

Eine wichtige Frage (vgl. Seite 28) besteht darin, ob V als direkte Summe von Eigenräumen dargestellt werden kann. Hierzu zuerst einige Beobachtungen:

* Gilt $\lambda \neq \mu$, dann ist $E_\lambda \cap E_\mu = \{\vec{0}\}$, d.h. $E_\lambda + E_\mu = E_\lambda \oplus E_\mu$.

  (Beweis: $\vec{v} \in E_\lambda \;\wedge\; \vec{v} \in E_\mu$
  $\Leftrightarrow \varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \;\wedge\; \varphi(\vec{v}) = \mu \vec{v}$
  $\Rightarrow \vec{0} = \varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{v}) = \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ $\square$.)

* Mit mehreren unterschiedlichen Eigenwerten ist dementsprechend
  $$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r} .$$

* Hat man je eine Basis $(\vec{v}^{\,i}_1, .., \vec{v}^{\,i}_{d_i})$ für alle E_{λ_i} ($d_i := \dim E_{\lambda_i}$), so ergibt also
  $$(\vec{v}^{\,1}_1, \dots, \vec{v}^{\,1}_{d_1}, \vec{v}^{\,2}_1, \dots, \vec{v}^{\,2}_{d_2}, \dots, \vec{v}^{\,r}_1, \dots, \vec{v}^{\,r}_{d_r})$$
  eine Basis für $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$.

* Weil diese eine Basis ist, d.h. alle Basisvektoren linear unabhängig sind, so gilt
  $$\sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i} \leq \dim V .$$

* Wenn $V \subset \mathbb{K}^n$ besitzt der Operator also höchstens n verschiedene Eigenwerte!

Wie bestimmt man die Eigenwerte und Eigenvektoren in der Praxis?

(i) Man betrachte die entsprechende Matrix A. Diese besitzt dieselben Eigenwerte:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & V \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\Phi", "\cong"'] \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \arrow[u, "\Phi", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

$$A = \Phi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi$$
$$\Leftrightarrow A \circ \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \circ \varphi$$
$$\Leftrightarrow (A \circ \Phi^{-1})(\vec{v}) = (\Phi^{-1} \circ \varphi)(\vec{v}) = \Phi^{-1}(\varphi(\vec{v}))$$
$$= \Phi^{-1}(\lambda \vec{v}) = \lambda\, \Phi^{-1}(\vec{v}),$$

d.h. $\Phi^{-1}(\vec{v})$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

(ii) Sei $\vec{x} := \Phi^{-1}(\vec{v})$. Es folgt:

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$
$$\Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \vec{x} \in \operatorname{Kern}(A - \lambda E).$$

Seite 10: $\vec{x} \neq \vec{0}$ nur bei $\det(A - \lambda E) = 0$!

(iii) Man konstruiere also das charakteristische Polynom der Matrix A,

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda E).$$

Die Eigenwerte sind seine Nullstellen!

(iv) Um den entsprechenden Eigenraum, d.h. die Vektoren $\vec{x}$ zu bestimmen, löse man das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}.$$

Die Anzahl unabhängiger Lösungen ergibt die geometrische Vielfachheit:

$$\dim E_\lambda = \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda E).$$

(v) Die „abstrakten" Eigenvektoren $\vec{v} \in V$ erhält man durch $\vec{v} = \Phi(\vec{x})$.

Bemerkung: Ob eine gegebene Matrix Eigenwerte besitzt oder nicht, hängt von der Wahl von $\mathbb{K}$ ab. Bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ garantiert der Fundamentalsatz der Algebra (vgl. Seite 23), dass $P_A(\lambda)$ Nullstellen hat; bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist dies nicht unbedingt der Fall.

<u>Diagonalisierbarkeit:</u> Ein Operator $\varphi : V \to V$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum heißt <u>diagonalisierbar</u>, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von φ besitzt.

Anders ausgedrückt: $V = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}$, oder

$$\dim V = \sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i} \,.$$

Insbesondere ist jeder Operator mit $n = \dim V$ <u>verschiedenen</u> Eigenwerten diagonalisierbar.

<u>Was bedeutet das in der Praxis?</u>

Wenn φ diagonalisierbar ist, wähle $\vec{v}_i$, mit Eigenwerten λ_i, als die Basisvektoren von V. Es folgt:

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi\Big(\sum_i x_i \vec{v}_i\Big) = \sum_i x_i \varphi(\vec{v}_i) = \sum_i x_i \lambda_i \vec{v}_i \,,$$

d.h. sehr einfache Wirkung! Und auch:

$$\begin{aligned} A(\vec{e}_i) &= (\Phi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi)(\vec{e}_i) = \Phi^{-1}(\varphi(\Phi(\vec{e}_i))) \\ &= \Phi^{-1}(\varphi(\vec{v}_i)) = \Phi^{-1}(\lambda_i \vec{v}_i) = \lambda_i \Phi^{-1}(\vec{v}_i) \\ &= \lambda_i \vec{e}_i \qquad (\text{keine Summen!}) \,, \end{aligned}$$

d.h. $$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(Mathematische Ergänzung: Sei V ein n-dimensionaler <u>komplexer</u> Vektorraum. Dann ist das charakteristische Polynom von der Gestalt

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \,,$$

mit wohlbestimmten $m_i \geq 1$, welche die „algebraischen" Vielfachheiten der Eigenwerte heißen. Es folgt aus Linearfaktorzerlegung (Seite 23), dass $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$ gilt. Im Allgemeinen erfüllen die geometrischen Vielfachheiten $d_i = \dim E_{\lambda_i}$ die Ungleichungen $d_i \leq m_i$; die Matrix ist diagonalisierbar wenn $d_i = m_i \;\forall\, i = 1, \ldots, r$.)

— o —