1.5 Kreuzprodukt bzw. Vektorprodukt [Arfken 1.4-5]

Wir kehren zurück zur Determinante (Kapitel 1.3) und diskutieren weitere Anwendungen (neben Existenzcheck und Konstruktion der Inverse).

Orientierte Basis: Eine Basis $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ des $\mathbb{R}^n$ heißt „positiv orientiert" bzw. „rechtshändig", wenn $\det A > 0$; und „negativ orientiert" bzw. „linkshändig", wenn $\det A < 0$.

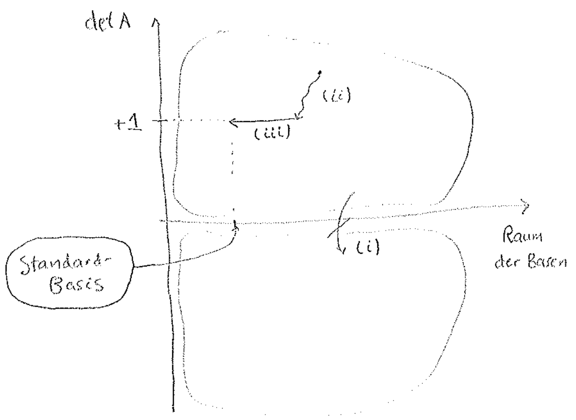
Beispiele: $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ist rechtshändig $(\det E = 1 > 0)$;
$(\vec{e}_1, \dots, -\vec{e}_n)$ sowie $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ sind linkshändig.

Kontinuierliche Deformation: Eine Basis mit Matrix $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ in eine mit Matrix B zu deformieren heißt, einen stetigen Weg $t \mapsto A(t)$, $t \in [0,1]$ im Raum $\mathbb{R}^{n \times n}$ zu finden, so dass $A(0) = A$ und $A(1) = B$ ist und für jedes $0 < t < 1$ die Matrix $A(t)$ immer invertierbar ist, ihre Spaltenvektoren sind also linear unabhängig.

„Topologie" der Händigkeit: Der Raum der rechtshändigen Basen ist zusammenhängend: jede Basis läßt sich in die Standardbasis deformieren. (Analog mit linkshändigen Basen; deformierbar in $(\vec{e}_1, \dots, -\vec{e}_n)$.)

Begründung:

(i) Bei einer kontinuierlichen Deformation bleibt Händigkeit unverändert: $\det A$ ist als Polynom eine stetige Funktion von a_{ij}; $t \mapsto \det A(t)$ ist deshalb stetig und darf wegen $\det A(t) \neq 0$ das Vorzeichen nicht wechseln.



(ii) Das Gram-Schmidt-Verfahren (Seite 16) kann kontinuierlich durchgeführt werden: statt $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{u}_{k+1}, \dots, \vec{u}_n) \to (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{u}_n)$ jetzt als $A(t) := (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, (1-t)\vec{u}_{k+1} + t\,\vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n)$.

(iii) Nach Gram-Schmidt-Verfahren kann man die orthonormierte Basis noch durch eine Drehung, auch ein kontinuierliches Verfahren, entweder in $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ oder $(\vec{e}_1, \dots, -\vec{e}_n)$ überführen.

<u>Spatvolumen</u>: Die Determinante einer Matrix ist das <u>orientierte Volumen</u> des von den Spaltenvektoren aufgespannten Spats, und

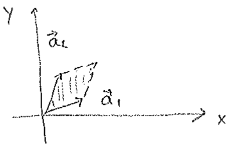
$$|\det A| = \mathrm{Vol}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) .$$

Hintergrund:

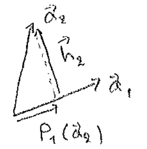
* Sind $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ so heißt

$$\mathrm{Spat}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i \;\middle|\; 0 \le \lambda_i \le 1 \;\forall i \right\}$$

das von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ aufgespannte k-Spat oder Parallelepiped.



* Das k-dimensionale Volumen $\mathrm{Vol}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ sei induktiv als $\mathrm{Vol}_1(\vec{a}_1) := |\vec{a}_1|$, $\mathrm{Vol}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) = \mathrm{Vol}_{k-1}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}) \cdot h_k$ definiert, wobei $h_k := |\vec{h}_k|$ und $\vec{h}_k := \vec{a}_k - P_{k-1}(\vec{a}_k)$ der „Höhenvektor" ist, definiert mittels der Orthogonalprojektion P_{k-1} auf die lineare Hülle $\mathrm{Lin}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1})$.

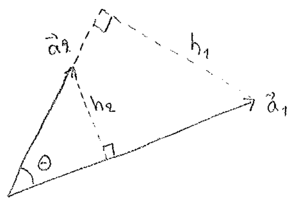


* Orientiertes Volumen := Volumen mal Händigkeit von $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$.

Begründung: Es muss gezeigt werden, das Vol_k eine <u>multilineare</u> und völlig <u>symmetrische</u> Abbildung ist. Orientiertes Volumen ist folglich multilinear und alternierend. Damit ist die Wirkung durch $\mathrm{Vol}_k(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ bestimmt (vgl. Seite 9). Wenn dieses auf eins gesetzt wird, erhalten wir nichts anders als die Determinante (vgl. Seite 10) $\Rightarrow \square$.

* Linearität: Konstruiere aus $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1})$ eine orthonormierte Basis. Dann ist $P_{k-1}(\vec{a}_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{v}_i, \vec{a}_k \rangle \vec{v}_i$ sowie $\vec{h}_k = \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{v}_i, \vec{a}_k \rangle \vec{v}_i$ linear in $\vec{a}_k$.

* Symmetrie: $|\vec{a}_1| h_2 = |\vec{a}_2| h_1$?



$$h_2 = |\vec{a}_2| \sin\theta$$
$$h_1 = |\vec{a}_1| \sin\theta$$

$\Rightarrow |\vec{a}_1| h_2 = |\vec{a}_1||\vec{a}_2| \sin\theta = |\vec{a}_2| h_1 \quad \square$.

Der allgemeine Fall durch Induktion (nicht ganz trivial!) $\Rightarrow \square$.

Kreuzprodukt: Zur Erinnerung (Seite 10): das Levi-Civita-Symbol wird als

$$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} := \begin{cases} \mathrm{sign}(\tau_{\mu_1 \cdots \mu_n}), & \text{wenn } (\mu_1, \dots, \mu_n) \text{ eine Permutation von } (1, \dots, n) \text{ ist;} \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

definiert, und $\det A = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} \varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} a_{\mu_1 1} \cdots a_{\mu_n n}$ (Leibniz).

Mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols kann eine multilineare Abbildung $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ als

$$(\vec{x}, \dots, \vec{y}) \mapsto \vec{z} \quad \text{mit} \quad z_\nu := \sum_{\mu_1, \dots, \mu_{n-1}} \varepsilon_{\nu \mu_1 \cdots \mu_{n-1}} x_{\mu_1} \cdots y_{\mu_{n-1}}$$

definiert werden. Für $n = 3$ geht es also um eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und damit um ein „Produkt" (zwei Argumente):

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x_j y_k$$

Dies wird das Kreuzprodukt genannt.

Eigenschaften:

* $$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

* $$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

(Denn: $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \sum_i (\vec{x} \times \vec{y})_i z_i = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} z_i x_j y_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k$ $\square$.)

* $$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x} = (\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y}$$

(Denn: $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \det(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = \det(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y})$.
zwei Vertauschungen)

* „Jacobi-Identität":

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y} = \vec{0}$$

(Beweis: Aufgabe 3.4:

$$\begin{aligned}
&\left[(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y}\right]_k \\
&= \left[(\vec{x} \times \vec{y})_i z_j + (\vec{y} \times \vec{z})_i x_j + (\vec{z} \times \vec{x})_i y_j\right] \varepsilon_{ijk} \\
&= x_m y_n z_j \varepsilon_{imn} \varepsilon_{ijk} + y_m z_n x_j \varepsilon_{imn} \varepsilon_{ijk} + z_m x_n y_j \varepsilon_{imn} \varepsilon_{ijk} \\
&= x_m y_n z_j (\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}) + y_m z_n x_j (\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}) + z_m x_n y_j (\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}) \\
&= \vec{x} \cdot \vec{z}\, y_k - \vec{y} \cdot \vec{z}\, x_k + \vec{y} \cdot \vec{x}\, z_k - \vec{z} \cdot \vec{x}\, y_k + \vec{z} \cdot \vec{y}\, x_k - \vec{x} \cdot \vec{y}\, z_k = 0.
\end{aligned}$$
)

Anwendungen:

* Ist das Paar $\vec{x}, \vec{y}$ linear unabhängig, so ist $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}\times\vec{y})$ eine rechtshändige Basis von $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung: $\vec{x}, \vec{y}$ sind nicht unbedingt orthogonal, d.h. $\vec{x}\cdot\vec{y} \neq 0$ ist erlaubt, aber $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind orthogonal zu $\vec{x}\times\vec{y}$:
$\vec{x}\cdot(\vec{x}\times\vec{y}) = \det(\vec{x},\vec{x},\vec{y}) = 0$.

Beweis: Es muß gezeigt werden, dass $\det(\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}) > 0$ gilt.
Hier $\det(\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}) = (\vec{x}\times\vec{y})\cdot(\vec{x}\times\vec{y}) = |\vec{x}\times\vec{y}|^2 \geq 0$.
Gleichheit kann ausgeschlossen werden, denn $\vec{x},\vec{y}$ sind linear unabhängig und wenn auch ein dritter linear unabhängiger Vektor $\vec{z}$ gewählt wird, ist laut Seite 10 $\det(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = (\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z} \neq 0$.
Also $|\vec{x}\times\vec{y}|^2 = \det(\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}) > 0$ $\square$.

* Ist $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ (bezüglich des inneren Produkts), so ist $\vec{v}_1\times\vec{v}_2 = \vec{v}_3$.

Beweis: Entwickle $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ nach der Basis, $\vec{v}_1\times\vec{v}_2 = \sum_i \lambda_i \vec{v}_i$;
die Koeffizienten sind $\lambda_i = \vec{v}_i\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)$, d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Es gilt auch $\lambda_3 = \vec{v}_3\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2) = \det(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3) > 0$, weil die Basis als rechtshändig angenommen wurde.
Aber warum ist $\lambda_3 = +1$?

Sei $V := (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$.

Es folgt $[V^T V]_{ij} = [V^T]_{ik}[V]_{kj} = v_{ki}v_{kj} \overset{!}{=} \vec{v}_i\cdot\vec{v}_j = \delta_{ij}$,

(vgl. Seite 11)

d.h. $V^T V = E$.

Nehme Determinante auf beiden Seiten

$$\Rightarrow 1 = \det(V^T V) = \det(V^T)\det(V) \overset{\text{Seite 11}}{=} \det(V)\det(V) = [\det(V)]^2$$

$$\Rightarrow \det V = \pm 1 \quad \Rightarrow \det V = +1$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \det V = +1 \quad \square.$$

— o —