1.4 Quadratische Formen, Skalarprodukt [Arfken 1.3]

Betrachtet werden multilineare Abbildungen wie auf Seite 9 aber diesmal symmetrische und bilineare, d.h. mit nur zwei Argumenten. Genauer:

Quadratische Form: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein UVR. Ist $\beta : U \times U \to \mathbb{R}$ symmetrisch und bilinear, so heißt die Abbildung $q : U \to \mathbb{R}$ mit

$$q(\vec{u}) := \beta(\vec{u}, \vec{u})$$

die zu β gehörige quadratische Form.

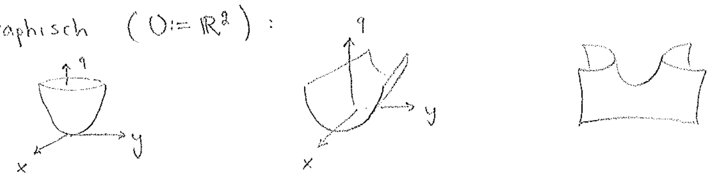
Bemerkung: β läßt sich aus q rekonstruieren!

$$q(\vec{u}+\vec{v}) = \beta(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}) \underset{\text{Linearität}}{=} \beta(\vec{u},\vec{u}) + \beta(\vec{u},\vec{v}) + \beta(\vec{v},\vec{u}) + \beta(\vec{v},\vec{v})$$
$$\underset{\text{Symmetrie}}{=} \beta(\vec{u},\vec{u}) + 2\beta(\vec{u},\vec{v}) + \beta(\vec{v},\vec{v})$$
$$\Rightarrow \beta(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{2}\left[q(\vec{u}+\vec{v}) - q(\vec{u}) - q(\vec{v}) \right] \quad !$$

Eigenschaften: Eine quadratische Form heißt:

- positiv definit, wenn $q(\vec{u}) > 0 \ \forall \vec{u} \neq \vec{0}$;
- positiv semidefinit, wenn $q(\vec{u}) \geq 0 \ \forall \vec{u} \in U$;
- analog für negativ definit und semidefinit;
- andernfalls indefinit.

Graphisch ($U := \mathbb{R}^2$):



positiv definit — positiv semidefinit — indefinit

Koeffizienten bzgl. Basis: Wählt man eine Basis, so ist (vgl. Seite 7)

$$\beta_{ij} := \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$$

symmetrisch, und

$$\beta(\vec{x},\vec{y}) = \beta(x_i\vec{u}_i, y_j\vec{u}_j) = \sum_{ij} x_i y_j \beta_{ij} = \sum_{ij} x_i \beta_{ij} y_j =: \vec{x}^T B \vec{y},$$

wobei $B := (\beta_{ij})$ eine symmetrische Matrix ist ($B^T = B$).
Die zugehörige quadratische Form: $q(\vec{x}) = \vec{x}^T B \vec{x}$.

Basisabhängigkeit: Für eine gegebene q ist die Matrix B nicht eindeutig: hängt von der Wahl der Basis ab.

(Ohne Beweis: eine Basis kann gefunden werden, genannt die „Sylvester*-Basis", in der B die Form $B = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots 1 & \\ 0 & & & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix}$ annimmt.)

* Die Bezeichnung „Matrix" wurde 1850 von Sylvester eingeführt.

Skalarprodukt: Jede positiv definite symmetrische Bilinearform β definiert ein Skalarprodukt:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \beta(\vec{u}, \vec{v}) .$$

Es folgt: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0 \quad \forall \, \vec{u} \neq \vec{0}$;

$$\langle \vec{0}, \vec{0} \rangle \underset{\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}}{=} 0 \cdot \langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = 0 .$$

Beispiel: Das „innere Produkt", $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} := \sum_i u_i v_i$, wobei $\{u_i\}, \{v_i\}$ die Komponente in der kartesischen Standardbasis bezeichnen, ist ein Skalarprodukt; in diesem Fall gilt

$$B = E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} .$$

Bemerkung: „Positiv definit" wird durch q, d.h. gleiche Argumente in β (also mit nur einem Vektor) definiert; $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle < 0$ ist möglich!

Beziehung zur Geometrie: Jedes Skalarprodukt führt seine eigene Geometrie mit sich!

* Norm von $\vec{u} \in U$: $\quad |\vec{u}| := \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$.

* Orthogonalität von $\vec{u}, \vec{v} \in U$: $\vec{u} \perp \vec{v}$ genau dann, wenn wie bei Pythagoras $|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2$ gilt

$$\Leftrightarrow \quad |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{0 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle} .$$

* Parallele und senkrechte Komponente:

Sei $\vec{v}$ gegeben. Schreibe $\vec{u}$ als

$$\vec{u} = \vec{u} - \lambda \vec{v} + \lambda \vec{v} , \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Wir können λ so wählen, dass $\vec{u} - \lambda \vec{v} \perp \vec{v}$:

$$\langle \vec{v}, \vec{u} - \lambda \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \lambda |\vec{v}|^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2}$$

D.h. $\vec{u} = \vec{u}_\perp + \vec{u}_\parallel$, wobei

$$\begin{cases} \vec{u}_\perp := \vec{u} - \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \\ \vec{u}_\parallel := \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \end{cases}$$

* Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$: Kann auch definiert werden, aber dazu brauchen wir ein paar Zwischenergebnisse!

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Ist $\langle\, , \rangle$ ein Skalarprodukt in U, so gilt $|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in U$.

Beweis: Wenn $\vec{u} = \vec{0}$ oder $\vec{v} = \vec{0}$, verschwinden beide Seiten. Seien also $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$. Betrachte

$$f(\lambda) := |\vec{u} - \lambda\vec{v}|^2 = \langle \vec{u} - \lambda\vec{v}, \vec{v} - \lambda\vec{v}\rangle$$
$$= |\vec{u}|^2 + \lambda^2|\vec{v}|^2 - 2\lambda\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \geq 0 \, .$$

Minimiere $f(\lambda)$ bzgl. λ:

$$\frac{df}{d\lambda} = 2\lambda|\vec{v}|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{|\vec{v}|^2}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{|\vec{v}|^2}\right) = |\vec{u}|^2 + \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2}{|\vec{v}|^2} - 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2}{|\vec{v}|^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2 \leq |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \leq |\vec{u}||\vec{v}| \, . \qquad \square$$

Dreiecksungleichung: $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Beweis:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}\rangle = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$$
$$\leq |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \underbrace{\leq}_{\text{Cauchy-Schwarz}} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|$$
$$= (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2 \qquad \square \, .$$

$\Rightarrow$ **Winkel:** Falls $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, gilt wegen Cauchy-Schwarz

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|} \leq 1 \, ,$$

und wir definieren den Winkel $\Theta_{\vec{u},\vec{v}}$ durch

$$\cos\Theta_{\vec{u},\vec{v}} := \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|} \, .$$

Falls $\vec{u} \perp \vec{v}$ ist $\cos\Theta_{\vec{u},\vec{v}} = 0$, d.h. $\Theta_{\vec{u},\vec{v}} = \pm\frac{\pi}{2}$.

Orthonormalbasis: Mittels des Skalarprodukts kann man besonders wertvolle Basen definieren: eine Orthonormalbasis von U bzgl. des Skalarprodukts $\langle\, , \rangle$ ist eine Basis $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ mit der Eigenschaft

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = \delta_{ij} \, ,$$

d.h. mit Norm eins und alle Basisvektoren senkrecht aufeinander.

Wie benutzt man eine Orthonormalbasis?

Anhand von $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ kann $\forall\, \vec{u} \in U$ als

$$\vec{u} = \langle \vec{v}_1, \vec{u} \rangle\, \vec{v}_1 + \dots + \langle \vec{v}_n, \vec{u} \rangle\, \vec{v}_n$$

entwickelt werden! Denn $\vec{u} = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n$, weil $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ eine Basis ist, und nimmt man auf beiden Seiten ein Skalarprodukt mit $\vec{v}_i$, erhält man $c_i = \langle \vec{v}_i, \vec{u} \rangle$ $\square$.

(In der Physik nennt man die gegebene Eigenschaft die „Vollständigkeit" einer Basis; man schreibt um als

$$\vec{u} = \underbrace{\mathrm{id}_U}_{\text{Einheitsoperator in } U} \vec{u} = „\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \langle \vec{v}_i, " \vec{u} \underbrace{=}_{\text{„Dirac-Notation"}} \sum_{i=1}^{n} | \vec{v}_i \rangle \langle \vec{v}_i | \vec{u} \rangle .$$
)

(Mathematisch gesehen macht eine Orthonormalbasis deutlich*, dass U als $U = \mathrm{Lin}(\vec{v}_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Lin}(\vec{v}_n)$ völlig „zerlegt" worden ist:

$$\vec{u} \in \mathrm{Lin}(\vec{v}_i) \;\wedge\; \vec{u} \in \mathrm{Lin}(\vec{v}_j), \quad i \neq j$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \lambda \vec{v}_i \;\wedge\; \vec{u} = \mu \vec{v}_j, \quad i \neq j$$

$$\underset{\text{nehme Skalarprodukt mit } \vec{v}_i}{\Rightarrow} \langle \vec{v}_i, \vec{u} \rangle = \lambda \;\wedge\; \langle \vec{v}_i, \vec{u} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} = \vec{0} \qquad \square .$$

* obwohl dies nicht nötig ist; es folgt auch aus $\vec{u} = \lambda \vec{v}_i \wedge \vec{u} = \mu \vec{v}_j$ dass $\vec{0} = \lambda \vec{v}_i - \mu \vec{v}_j$ $\Rightarrow \lambda = \mu = 0$
)

Wie konstruiert man eine Orthonormalbasis?

Dies geht durch „Gram-Schmidt-Verfahren".

Sei $\langle\, , \rangle$ ein Skalarprodukt in U, und $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ eine beliebige Basis.

- $\vec{v}_1 := \dfrac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$

- $\vec{v}_2 := \dfrac{\vec{u}_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{u}_2 \rangle \vec{v}_1}{|\vec{u}_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{u}_2 \rangle \vec{v}_1|}$ $\Rightarrow |\vec{v}_2| = 1$ und $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \dfrac{\langle \vec{v}_1, \vec{u}_2 \rangle - \langle \vec{v}_1, \vec{u}_2 \rangle}{|\vec{u}_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{u}_2 \rangle \vec{v}_1|} = 0$

$\vdots$

- $\vec{v}_{k+1} := \dfrac{\vec{u}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{v}_i, \vec{u}_{k+1} \rangle \vec{v}_i}{|\vec{u}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{v}_i, \vec{u}_{k+1} \rangle \vec{v}_i|}$ $\Rightarrow |\vec{v}_{k+1}| = 1$ und $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_{k+1} \rangle = \dfrac{\langle \vec{v}_i, \vec{u}_{k+1} \rangle - \langle \vec{v}_i, \vec{u}_{k+1} \rangle}{|\quad|} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$.

Es gilt auch $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \mathrm{Lin}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ $\forall\, k$, und damit ist $\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ die erwünschte Basis.

— · —