1.3 Determinante [Arfken 3.1]

Vieles über die Eigenschaften einer linearen Abbildung ist in einer einzigen Zahl, ihrer Determinante, enthalten.

Multilineare Abbildungen: Seien $U_1, \dots, U_r$ UVRe. Eine Abbildung

$$\omega: U_1 \times U_2 \times \dots \times U_r \to V$$
$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r) \mapsto \omega(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r)$$

heißt linear in der i-ten Variable, wenn stets

$$\omega(\dots, \lambda\vec{u}_i + \mu\vec{\tilde{u}}_i, \dots) = \lambda\omega(\dots, \vec{u}_i, \dots) + \mu\omega(\dots, \vec{\tilde{u}}_i, \dots)$$

gilt. Ist ω linear in jeder Variable, so heißt sie multilinear.

Koeffizienten bzgl. Basen: Seien $\vec{e}^{\,(1)}_{\mu_1}$ die Basisvektoren von U_1, d.h. $\vec{u}_1 = \sum_{\mu_1=1}^{\dim(U_1)} \lambda^{(1)}_{\mu_1} \vec{e}^{\,(1)}_{\mu_1}$, und analog bei $U_2, \dots, U_r$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\omega(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r) &= \sum_{\mu_1=1}^{\dim(U_1)} \lambda^{(1)}_{\mu_1}\, \omega(\vec{e}^{\,(1)}_{\mu_1}, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r) \\
&= \sum_{\mu_1, \mu_2} \lambda^{(1)}_{\mu_1} \lambda^{(2)}_{\mu_2}\, \omega(\vec{e}^{\,(1)}_{\mu_1}, \vec{e}^{\,(2)}_{\mu_2}, \dots, \vec{u}_r) \\
&\;\vdots \\
&= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_r} \lambda^{(1)}_{\mu_1} \cdots \lambda^{(r)}_{\mu_r}\, \underbrace{\omega(\vec{e}^{\,(1)}_{\mu_1}, \dots, \vec{e}^{\,(r)}_{\mu_r})}_{=:\, \omega_{\mu_1 \cdots \mu_r}}
\end{aligned}$$

Symmetrie-Eigenschaften: Sei $\omega: U \times U \times \dots \times U \to V$. Wenn

$$\omega(\dots, \vec{u}_i, \dots, \vec{u}_j, \dots) = \omega(\dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_i, \dots) \quad \forall\, i,j$$

heißt ω „symmetrisch"; wenn

$$\omega(\dots, \vec{u}_i, \dots, \vec{u}_j, \dots) = -\omega(\dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_i, \dots)$$

heißt ω „alternierend" bzw. „total antisymmetrisch".

Permutation: $\tau: \{1, \dots, r\} \to \{1, \dots, r\}$, z.B. $\tau(1,2,3) = (3,2,1)$

Wenn ω alternierend ist, gilt

$$\omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) = \mathrm{sign}(\tau)\, \omega(\vec{u}_{\tau(1)}, \dots, \vec{u}_{\tau(r)}),$$

wobei $\mathrm{sign}(\tau) = \pm 1$ je nachdem ob die Permutation τ durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen bewirkt werden kann.

Die Koeffizienten erfüllen ebenfalls

$$\omega_{\mu_{\tau(1)} \cdots \mu_{\tau(r)}} = \mathrm{sign}(\tau)\, \omega_{\mu_1 \cdots \mu_r}.$$

Wenn zwei Indices gleich sind, gilt unbedingt

$$\omega_{\dots\mu\dots\mu\dots} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Permutation}}}{-}\,\omega_{\dots\mu\dots\mu\dots} = 0.$$

Determinante: Wenn wir eine $n \times n$-Matrix A betrachten, dann können die Spalten als Vektoren $\in \mathbb{R}^n$ behandelt werden. In diesem Fall gilt

$$\omega(\vec{a}_1, .., \vec{a}_n) = \omega\left(\sum_{\mu_1=1}^{n} a_{\mu_1 1} \vec{e}_{\mu_1}, \dots, \sum_{\mu_n=1}^{n} a_{\mu_n n} \vec{e}_{\mu_n}\right)$$

$$= \sum_{\mu_1=1}^{n} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{n} a_{\mu_1 1} \cdots a_{\mu_n n} \, \omega(\vec{e}_{\mu_1}, \dots, \vec{e}_{\mu_n}) .$$

Sei weiterhin $V = \mathbb{R}$ und ω alternierend, und zwar

$$\omega(\vec{e}_{\mu_1}, \dots, \vec{e}_{\mu_n}) := \begin{cases} \mathrm{sign}(\tau_{\mu_1 \cdots \mu_n}), & \text{wenn } (\mu_1, .., \mu_n) \text{ eine Permutation von } (1, \dots, n) \text{ ist;} \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Diese $\omega_{\mu_1 \cdots \mu_n}$, oft als $\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n}$ bezeichnet, wird das Levi-Civita-Symbol genannt, und die entsprechende Abbildung heißt die Determinante von A:

$$\det A := \varepsilon(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$
$$= \sum_{\mu_1=1}^{n} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{n} a_{\mu_1 1} \cdots a_{\mu_n n} \, \mathrm{sign}(\tau_{\mu_1 \cdots \mu_n}) \quad \boxed{\text{„Leibniz-Formel"}}.$$

Ihre Bedeutung: Folgende Aussagen sind alle gleichbedeutend:

(i) $\det A \neq 0$

(ii) die Spalten sind linear unabhängig

Definition linearer Unabhängigkeit

Seite 8

(iii) $\operatorname{rang} A = n$

(iv) $\operatorname{Kern} A = \{\vec{0}\}$

Seite 5

(v) A ist invertierbar

(vi) $A\vec{x} = \vec{b}$ ist stets eindeutig lösbar.

Beweis (i) ⇒ (ii): Wenn $\vec{a}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \vec{a}_j$, dann ist

$$\det A = \varepsilon(\vec{a}_1, \dots, \sum_{j \neq i} \lambda_j \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n)$$
$$= \sum_{j \neq i} \lambda_j \, \varepsilon(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) = 0 \;\lightning$$

unbedingt gleiche Spalten!

(ii) ⇒ (i): Wenn die Spalten linear unabhängig sind, können sie als Basis dienen, d.h.

$$\vec{e}_1 = \sum_{\mu_1=1}^{n} \lambda_{\mu_1 1} \vec{a}_{\mu_1} \quad \text{usw.}$$

Folglich gilt

$$1 = \varepsilon(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$
$$= \sum_{\mu_1=1}^{n} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{n} \lambda_{\mu_1 1} \cdots \lambda_{\mu_n n} \, \varepsilon(\vec{a}_{\mu_1}, .., \vec{a}_{\mu_n})$$
$$= \sum_{\mu_1=1}^{n} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{n} \lambda_{\mu_1 1} \cdots \lambda_{\mu_n n} \, \mathrm{sign}(\tau) \underbrace{\varepsilon(\vec{a}_1, .., \vec{a}_n)}$$

wegen linker Seite kann nicht null sein!

Unterschiedliche Eigenschaften der Determinante:

(i) Für $n \times n$-Matrizen gilt $\det(AB) = \det A \det B$.
Insbesondere ist für invertierbare Matrizen wegen $AA^{-1} = E$ auch

$$\det(A^{-1}) = \frac{\det(E)}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)}.$$

Beweis: Seite 2: $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, mit $\vec{a}_i = A(\vec{e}_i)$
$B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$, mit $\vec{b}_j =: b_{kj} \vec{e}_k$

$\Rightarrow$ Spalte j von $A \circ B := (A \circ B)(\vec{e}_j) = A(B(\vec{e}_j)) = b_{kj} \vec{a}_k$

$$\Rightarrow \det(A \circ B) = \varepsilon(b_{k_1 1} \vec{a}_{k_1}, \dots, b_{k_n n} \vec{a}_{k_n})$$
$$\overset{\text{Linearität}}{=} b_{k_1 1} \cdots b_{k_n n} \, \varepsilon(\vec{a}_{k_1}, \dots, \vec{a}_{k_n})$$
$$\overset{\text{Antisymmetrie}}{=} \det(A) \, \operatorname{sign}(\tau_{k_1 \dots k_n}) \, b_{k_1 1} \cdots b_{k_n n}$$
$$\overset{\text{Leibniz}}{=} \det(A) \det(B) \qquad \square$$

(ii) Für eine „transponierte Matrix" $([A^T]_{ij} := a_{ji})$ gilt $\det(A^T) = \det(A)$,
d.h. in Leibniz-Formel kann sowohl bzgl. Spalten als auch bzgl. Zeilen entwickelt werden.

Beweis: $$\det(A^T) \overset{\text{Leibniz}}{=} A^T_{\mu_1 1} \cdots A^T_{\mu_n n} \operatorname{sign}(\tau_{\mu_1 \dots \mu_n})$$
$$= a_{1\mu_1} \cdots a_{n\mu_n} \operatorname{sign}(\tau_{\mu_1 \dots \mu_n})$$

Die Faktoren können aber nach dem zweiten Index neu angeordnet werden:

$$\tau(1, \dots, n) = (\mu_1 \dots \mu_n) \Leftrightarrow (1, \dots, n) = \tau^{-1}(\mu_1, \dots, \mu_n) =: \vartheta(\mu_1, \dots, \mu_n)$$
$$\Rightarrow a_{1\mu_1} \cdots a_{n\mu_n} = a_{\nu_1 1} \cdots a_{\nu_n n}, \text{ mit } (\nu_1, \dots, \nu_n) := \vartheta(1, \dots, n)$$

Weil $\vartheta \circ \tau = \tau \circ \vartheta = id$ gilt, ist auch $\operatorname{sign}(\tau) = \operatorname{sign}(\vartheta)$

$$\Rightarrow \det(A^T) = a_{\nu_1 1} \cdots a_{\nu_n n} \operatorname{sign}(\vartheta_{\nu_1 \dots \nu_n}) \underset{\text{Leibniz}}{=} \det(A) \qquad \square,$$

(iii) „Gauß-Algorithmus": Addition einer Linearkombination anderer Spalten zu einer Spalte ändert die Determinante nicht:

$$\varepsilon(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n)$$
$$= \varepsilon(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) + \sum_{j \neq i} \lambda_j \underbrace{\varepsilon(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n)}_{\text{Unbedingt gleiche Spalten} \to 0}$$

Vertauschung zweier Spalten liefert Minus-Zeichen. Wenn man mit diesen Tricks eine „Dreiecksform" erreicht ist die restliche Berechnung einfach:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \underset{\text{Gauß}}{\overset{\uparrow}{=}} \det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

(iv) „<u>Laplacescher Entwicklungssatz</u>": Für jede $n\times n$-Matrix gilt

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{„Schachbrettvorzeichen"}} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

was die Entwicklung nach der j-ten Spalte genannt wird, und

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

was die Entwicklung nach der i-ten Zeile genannt wird. Hier ist A_{ij} die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die durch weglassen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A entsteht.

(Beweis: Folgt direkt aus der Leibniz-Formel.)

(v) „<u>Inversionsformel</u>": Definiert man zu A eine Matrix B durch

$$b_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$
Indizes transponiert!

so gilt (falls $\det(A) \neq 0$)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot B .$$

(Beweis: Sei $C := A \circ \frac{1}{\det(A)} B = \frac{1}{\det(A)} A \circ B$, d.h.

$$c_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$
$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} \det A_{jk}$$

Für $i=j$ ergibt die Summe den Laplaceschen Entwicklungssatz nach der j-ten Zeile, und $c_{jj} = \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1$.

Für $i \neq j$ entspricht die Summe der Determinante einer Matrix, in der die j-te Zeile durch die i-te Zeile ersetzt wurde (a_{ik} statt a_{jk}) – aber dann kommt die i-te Zeile zweimal vor, und die Determinante verschwindet! $\Rightarrow c_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.)

— o — o —