## 1.2 Isomorphie, Basen, Dimension, Rang [Arfken 3.2]

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ Untervektorräume,
d.h. $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U \Rightarrow \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \in U \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
und $\varphi : U \to V$ eine lineare Abbildung,
d.h. $\varphi(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) = \lambda_1 \varphi(\vec{u}_1) + \lambda_2 \varphi(\vec{u}_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Mit welchen Eigenschaften können wir $U, V$ und $\varphi$ charakterisieren?

(i) Wenn $\varphi$ bijektiv ist, d.h. $\exists \varphi^{-1}$, dann sind $U$ und $V$ „äquivalent".
Wir nennen $\varphi$ Isomorphismus und bezeichnen $\varphi: U \cong V$.
„isomorph zu"

Mehr dazu:

- $\mathrm{Kern}\,\varphi := \{\vec{u} \in U \mid \varphi(\vec{u}) = \vec{0}\}$.

  $\varphi$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}\,\varphi = \{\vec{0}\}$

  „$\Rightarrow$": $\varphi(\vec{u}_1) = \varphi(\vec{u}_2) \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{u}_2$
  $\Leftrightarrow \varphi(\vec{u}_1) - \varphi(\vec{u}_2) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0}$
  $\Leftrightarrow \varphi(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0}$ □.

  „$\Leftarrow$": Vom unten nach oben.

- $\mathrm{Bild}\,\varphi := \{\varphi(\vec{u}) \mid \vec{u} \in U\}$.

  $\varphi$ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Bild}\,\varphi = V$

  („$\Leftrightarrow$" $\forall \vec{v} \in V \ \exists \vec{u} \in U$ mit $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$)

$\Rightarrow$ $\varphi$ ist Isomorphismus genau dann wenn $\mathrm{Kern}\,\varphi = \{\vec{0}\}$ und $\mathrm{Bild}\,\varphi = V$.

Anwendung: Ein lineares Gleichungssystem,

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

kann als $A(\vec{x}) = \vec{b}$ dargestellt werden.

Eine Lösung existiert, falls $\vec{b} \in \mathrm{Bild}\,A$.

Die Lösung ist eindeutig, falls $\mathrm{Kern}\,A = \{\vec{0}\}$ gilt.

„Die allgemeine Lösung" wird durch den Raum
$\{\vec{x}_0\} + \mathrm{Kern}\,\varphi$ gegeben, wobei $A(\vec{x}_0) = \vec{b}$ gilt;
$\vec{x}_0$ ist also eine einzelne Lösung der „inhomogenen Gleichung",
$\mathrm{Kern}\,\varphi$ stellt die allgemeine Lösung der „homogenen Gleichung" dar.

(ii) Eine Basis des UVR $U \in \mathbb{R}^n$ verhilft uns zu Koordinaten in $U$.

**Definitionen:**

- Die Vektoren $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ sind linear unabhängig, wenn keiner dieser Vektoren aus den anderen linearkombiniert werden kann, d.h. wenn
$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r = \vec{0}$$
nur im trivialen Fall $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ möglich ist.
- Ein linear unabhängiges r-Tupel $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ heißt eine Basis von $U$, wenn seine lineare Hülle ganz $U$ ist.
- Wenn ein Vektor $\vec{u} \in U$ als $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r$ entwickelt wird, heißen die Entwicklungskoeffizienten die Koordinaten von $\vec{u}$ bezüglich der Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$.

**Lemma:** Die Koordinaten sind eindeutig!

(Beweis: $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r = \mu_1 \vec{u}_1 + \dots + \mu_r \vec{u}_r$
$$\Rightarrow \vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{u}_1 + \dots + (\lambda_r - \mu_r)\vec{u}_r$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_r = \mu_r \quad \square.)$$

**Definitionen:**

- Die Basis $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ des $\mathbb{R}^n$ nennt man Standard-Basis.
- Ist $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ eine Basis von $U$, so wird der Isomorphismus $\mathbb{R}^r \cong U$, welcher $\vec{e}_i$ auf $\vec{u}_i$ abbildet, Basis-Isomorphismus zu $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ genannt und mit $\Phi(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) : \mathbb{R}^r \cong U$ bezeichnet.

**Anwendung:** Ist $\varphi : U \to V$ eine lineare Abbildung und sind $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ und $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$ Basen von $U$ und $V$, so heißt die durch
$$\Phi^{-1}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s) \circ \varphi \circ \Phi(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) =: A$$
gegebene $s \times r$-Matrix $A : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ die Matrix von $\varphi$ bezüglich dieser Basen. Graphisch:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] & V \\
\mathbb{R}^r \arrow[u, "\Phi(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)", "\cong"'] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^s \arrow[u, "\cong", "\Phi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)"']
\end{tikzcd}$$

(iii) Die einzige „wichtige" Eigenschaft eines UVR ist seine Dimension.

Satz und Definition: (ohne Beweis) In jedem UVR $U \subset \mathbb{R}^n$ läßt sich eine Basis finden. Die Anzahl der Vektoren einer Basis von $U$ heißt die Dimension von $U$, man schreibt $\dim U$. Wenn $U = \{\vec{o}\}$ dann ist $\dim U := 0$.

Bemerkungen:

- $U$ und $V$ sind genau dann isomorph, d.h. $U \cong V$, wenn sie die gleiche Dimension haben.

  („$\Rightarrow$" Sei $\varphi: U \to V$ ein Isomorphismus, und $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ eine Basis von $U$. Dann ist $(\varphi(\vec{u}_1), \dots, \varphi(\vec{u}_r))$ eine Basis von $V$:
  $$\vec{v} = \varphi(\underbrace{\varphi^{-1}\vec{v}}_{\in U}) = \varphi\left(\sum_i \lambda_i \vec{u}_i\right) = \sum_i \lambda_i \varphi(\vec{u}_i)$$
  Folglich ist $\dim V = \dim U$ $\square$.
  „$\Leftarrow$" Definiere $\varphi: U \to V$ und $\psi: V \to U$ durch $\varphi(\vec{u}_i) := \vec{v}_i$ und $\psi(\vec{v}_i) := \vec{u}_i$. Dann gilt
  $$\varphi(\psi(\vec{v})) = \varphi\left(\psi\left(\sum_i \lambda_i \vec{v}_i\right)\right) = \varphi\left(\sum_i \lambda_i \psi(\vec{v}_i)\right)$$
  $$= \sum_i \lambda_i \varphi(\vec{u}_i) = \sum_i \lambda_i \vec{v}_i = \vec{v},$$
  d.h. $\varphi \circ \psi = id_V \Rightarrow \psi = \varphi^{-1} \Rightarrow \square$.)

- Jede invertierbare Matrix ist quadratisch.
  (Denn eine invertierbare Matrix $A$ definiert einen Isomorphismus: $A: \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Rightarrow n = \dim \mathbb{R}^n = m$.)

- Zu jedem UVR $U_1 \subset U$ eines Untervektorraums $U \subset \mathbb{R}^n$ läßt sich ein „komplementärer" UVR $U_2$ finden: $U = U_1 \oplus U_2$.

  (Sei $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ eine Basis von $U_1$ und $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$ eine Basis von $U$. Setze $U_2 := \mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$. Dann ist $U = U_1 + U_2$, und auch $U_1 \cap U_2 = \{\vec{o}\}$: wenn $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r$ und $\vec{u} = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_s \vec{v}_s$, ist $\vec{o} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r - \mu_1 \vec{v}_1 - \dots - \mu_s \vec{v}_s$, und folglich $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{o}$ $\square$.)

- Sind $U_1, U_2 \subset U$ Untervektorräume, so gilt
  $$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

  (Sei $r = \dim(U_1 \cap U_2)$. Für eine Basis von $U_1$ braucht man $s$ zusätzliche Basisvektoren, d.h. $\dim U_1 = r + s$, und für $U_2$ $t$ zusätzliche, d.h. $\dim U_2 = r + t$.
  Für $U_1 + U_2$ braucht man sowohl die $s$ von $U_1$ als auch die $t$ von $U_2$, weil nämlich diese nicht in $U_1 \cap U_2$ sind und deshalb linear unabhängig sind: $\dim(U_1 + U_2) = r + s + t$.
  Die Behauptung folgt von $r + (r+s+t) = (r+s) + (r+t)$.)

(iv) Die „Stärke" einer Abbildung wird durch ihren Rang charakterisiert.

Definition: Ist $\varphi: U \to V$ eine lineare Abbildung, so nennt man

$$\operatorname{rang}\varphi := \dim \operatorname{Bild}\varphi$$

ihren Rang.

Bemerkung: Wird $\varphi$ als eine $m \times n$-Matrix dargestellt, so ist der Rang dasselbe wie die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten.

(Laut Seite 2 sind die Spalten die Bilder der Einheitsvektoren. Unter den Spalten kann also eine Basis gewählt werden.)

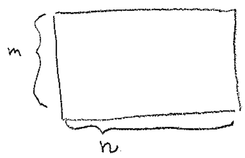
Dimensionsformel: Ist $\varphi: U \to V$ linear, so gilt $\boxed{\operatorname{rang}\varphi + \dim \operatorname{Kern}\varphi = \dim U}$.

In Worten: Information über $U$ ($= \dim U$) kann in einer linearen Abbildung entweder vernichtet werden ($= \dim \operatorname{Kern}\varphi$) oder eben beibehaltet werden ($= \dim \operatorname{Bild}\varphi = \operatorname{rang}\varphi$).

( Schreibe $U = \operatorname{Kern}\varphi \oplus U_2$ (Vgl. Seite 7).
Wenn $\vec{u} \in U$ als $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ ausgedrückt wird,
mit $\vec{u}_1 \in \operatorname{Kern}\varphi$ und $\vec{u}_2 \in U_2$, dann ist
$\varphi(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \underbrace{\varphi(\vec{u}_1)}_{\vec{0}} + \varphi(\vec{u}_2) = \varphi(\vec{u}_2)$. D.h. nur $\vec{u}_2$ ergibt etwas in $\operatorname{Bild}\varphi$, und $\dim \operatorname{Bild}\varphi = \dim U_2$.
$\Rightarrow \dim U = \dim \operatorname{Kern}\varphi + \dim U_2 = \dim \operatorname{Kern}\varphi + \operatorname{rang}\varphi$ $\square$. )

## Wie bestimmt man den Rang einer Abbildung?

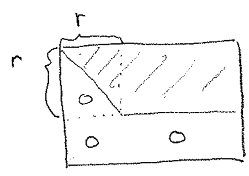
Fange mit $m \times n$-Matrixform an.




Erlaubt sind:

- Multiplikation einer Spalte / Zeile mit $\lambda \neq 0$.
- Addition des $\lambda$-fachen einer Spalte / Zeile zu einer anderen.
- Vertauschung zweier Spalten / Zeilen.

Ziel:




Dann ist $r = \operatorname{rang} A$, weil nur die $r$ ersten Spalten linear unabhängig sind.